MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Repetitorium
03.02.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

1. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda\, x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda\, x_3 & + & \lambda\, x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda\, x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2\, x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b)$. Es ist

$$(A_\lambda|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\leadsto}$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\,(\lambda-1) & 0 \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist $\lambda \neq 0$ und $\lambda\,(\lambda-1) \neq 0$, und wir erhalten
  - $\lambda\,(\lambda-1)\,x_4 = 0$, also $x_4 = 0$,
  - $\lambda\, x_3 = 1$, also $x_3 = \frac{1}{\lambda}$,
  - $x_2 - \lambda\, x_3 + \lambda\, x_4 = 0$, also $x_2 = 1$, und
  - $x_1 + x_2 + \lambda\, x_4 = 2$, also $x_1 = 1$.

  Damit besitzt sich für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ das gegebene lineare Gleichungssystem die einelementige Lösungsmenge $L = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

- Für $\lambda = 0$ gilt
$$(A_0|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$
wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das für $\lambda = 0$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar.
- Für $\lambda = 1$ gilt
$$(A_1|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$
damit ist x_4 eine freie Variable, und mit $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $x_3 = 1$ sowie $x_2 - x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 1 - \alpha$, und $x_1 + x_2 + x_4 = 2$, also $x_1 = 1$. Somit ist
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

2. Für das in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem
$$(G_t) \qquad \begin{array}{rcrcrcr} -x & & & + & 3\,z & = & 3 \\ -2\,x & - & t\,y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2\,y & + & t\,z & = & 1 \end{array}$$
betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_t \mid b)$ und erhalten
$$(A_t \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -t & 1 & 2 \\ 1 & 2 & t & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -t & -5 & -4 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & -t & -5 & -4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\frac{t}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2}(t+3)-5 & 2\,t-4 \end{array}\right),$$
wodurch wegen
$$\frac{t}{2}(t+3) - 5 = \frac{t \cdot (t+3) - 10}{2} = \frac{t^2 + 3\,t - 10}{2} = \frac{(t+5) \cdot (t-2)}{2}$$
die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

a) Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$ ist also $\frac{t}{2}(t+3) - 5 \neq 0$; folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_t) lösbar ohne freie Variable, also eindeutig lösbar.

- Es ist $\left(\frac{t}{2}(t+3)-5\right)\cdot z = 2\,t-4$, also

$$z = \frac{2\,t-4}{\frac{t}{2}(t+3)-5} = \frac{2(t-2)}{\frac{1}{2}(t-2)(t+5)} = \frac{4}{t+5},$$

- damit $2\cdot y + (t+3)\cdot z = 4$, also

$$y = \frac{1}{2}\left(4-(t+3)\cdot\frac{4}{t+5}\right) = \frac{4}{2}\cdot\frac{(t+5)-(t+3)}{t+5} = \frac{4}{t+5},$$

- und damit $x - 3\cdot z = -3$, also

$$x = -3+3\cdot\frac{4}{t+5} = -3\cdot\frac{(t+5)-4}{t+5} = \frac{-3(t+1)}{t+5};$$

folglich ergibt sich in diesen Fällen die jeweils einelementige Lösungsmenge

$$L_t = \left\{\frac{1}{t+5}\cdot\begin{pmatrix}-3(t+1)\\4\\4\end{pmatrix}\right\}.$$

b) Für $t=-5$ ergibt sich

$$(A_{-5}\mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 2 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -14\end{array}\right),$$

also ein Widerspruch in der dritten Zeile; folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_{-5}) nicht lösbar, besitzt also keine Lösungen.

c) Für $t=2$ ergibt sich

$$(A_2\mid b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3\\ 0 & 2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right);$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem (G_2) lösbar mit einer freien Variablen, besitzt also mehrere Lösungen.

- Mit $z=\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig ist
- damit $2\cdot y + 5\cdot z = 4$, also $y = \frac{1}{2}\,(4-5\cdot\lambda) = 2-\frac{5}{2}\,\lambda$,
- und damit $x-3\cdot z=-3$, also $x=-3+3\cdot\lambda$;

folglich ergibt sich in diesem Fall die Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{\begin{pmatrix}-3+3\,\lambda\\ 2-\frac{5}{2}\,\lambda\\ \lambda\end{pmatrix} \mid \lambda\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}3\\-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

3. Für beliebige reelle Zahlen a, b, $c\in\mathbb{R}$ ist in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\lambda\in\mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & \lambda\,z & = & a\\ x & + & \lambda\,y & & & = & b\\ \lambda\,x & + & y & + & z & = & c\end{array}$$

gegeben; mit der zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrix erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(A_\lambda \mid s) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & a \\ 1 & \lambda & 0 & b \\ \lambda & 1 & 1 & c \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\lambda\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & a \\ 0 & \lambda & -\lambda & b-a \\ 0 & 1 & 1-\lambda^2 & c-\lambda\, a \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & a \\ 0 & 1 & 1-\lambda^2 & c-\lambda\, a \\ 0 & \lambda & -\lambda & b-a \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\lambda\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & a \\ 0 & 1 & 1-\lambda^2 & c-\lambda\, a \\ 0 & 0 & \lambda^3-2\lambda & b-\lambda\, c+(\lambda^2-1)\, a \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

a) Im Hinblick auf

$$
\begin{aligned}
\lambda^3 - 2\,\lambda = 0 \iff \lambda\left(\lambda^2-2\right) = 0 \iff& \\
\iff \left(\lambda = 0 \text{ oder } \lambda^2 = 2\right) \iff \lambda \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}&
\end{aligned}
$$

ergibt sich die folgende Fallunterscheidung:

- Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$ ist $\lambda^3 - 2\,\lambda \neq 0$ und damit

$$\operatorname{Rang}(A_\lambda) = 3 = \operatorname{Rang}(A_\lambda \mid s)\,;$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem lösbar ohne freie Unbestimmte, also eindeutig lösbar.

- Für $\lambda \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$ ist $\lambda^3 - 2\,\lambda = 0$ und damit

$$\operatorname{Rang}(A_\lambda) = 2 \leq \operatorname{Rang}(A_\lambda \mid s)\,;$$

folglich ist das lineare Gleichungssystem im Falle $\operatorname{Rang}(A_\lambda \mid s) = 3$ unlösbar und im Falle $\operatorname{Rang}(A_\lambda \mid s) = 2$ lösbar mit einer freien Unbestimmten, also mehrdeutig lösbar.

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar, wenn $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$ ist.

b) Für $\lambda = 1$ ergibt sich gemäß obiger Rechnung

$$
\begin{aligned}
(A_1 \mid s) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & b-c \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+b-c \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & b-c \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a+b-c \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & c-b \end{array}\right),
\end{aligned}
$$

und wir lesen die (im Einklang mit b) einelementige Lösungsmenge)

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c \\ c-a \\ c-b \end{pmatrix} \right\}$$

an dieser reduzierten Zeilenstufenform direkt ab.

c) Für $\lambda = 0$ ergibt sich gemäß obiger Rechnung

$$(A_0 \mid s) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{array}\right);$$

damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{Rang}(A_0 \mid s) = \operatorname{Rang}(A_0) = 2$$

gilt, also genau für $b - a = 0$ bzw. $a = b$.

4. Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
(M \mid E_3) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha-4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -4 & 2 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M zeilenäquivalente Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

für $\alpha = 0$ in der dritten Zeile eine Nullzeile und ist damit in diesem Fall insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M für $\alpha = 0$ nicht invertierbar. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
(M \mid E_3) \quad &\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\frac{1}{\alpha}\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1+\frac{4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{\alpha} & 1-\frac{4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-4}{\alpha} & \frac{-\alpha+2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{\alpha} & \frac{\alpha-4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right) = (E_3 \mid M');
\end{aligned}$$

damit ist M für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M^{-1} = M' = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-4}{\alpha} & \frac{-\alpha+2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{8}{\alpha} & \frac{\alpha-4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

5. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{2 aus II, 3 aus III, 4 aus IV, 5 aus V}}{=} \\
&= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I, IV}-\text{I, V}-\text{I}}{=} \\
&= 120\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{(((I+II)+III)+IV)+V}}{=} \\
&= 120\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 120\cdot 4\cdot (-1)^4 = 480.
\end{aligned}$$

b) Wegen der Linearität der Determinante in jeder der fünf Zeilen gilt

$$\det(B) = \det\left((-\tfrac{1}{2})\cdot A\right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \det(A) = -\tfrac{1}{32}\cdot 480 = -15.$$

c) Wegen $\det(B) < 0$ gemäß b) kann es keine Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $C^2 = B$ geben, denn ansonsten ergäbe sich über den Determinantenmultiplikationssatz in

$$0 > -15 = \det(B) = \det(C^2) = (\det(C))^2 \geq 0$$

ein Widerspruch.

6. a)
   - Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

     $$\det(A\,B) = \det(A)\cdot\det(B);$$

     da nun ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann 0 ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren selbst 0 ist, erhält man damit in

     $$\begin{aligned} \det(AB) = 0 \iff \det(A)\cdot\det(B) = 0 \iff& \\ \iff \det(A) = 0 \text{ oder } \det(B) = 0& \end{aligned}$$

     die Behauptung.

- Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt zwar $A \neq 0$ und $B \neq 0$, aber dennoch $AB = 0$.
- Die Aussage ist falsch, denn für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt zwar $A \neq E_2$ und $A \neq -E_2$, aber dennoch $A^2 = E_2$.

b)
- Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

  sind (wegen $\det(A) = -1$ und $\det(B) = -1$) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist allerdings nicht symmetrisch.
- Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten a, b, $c \in \mathbb{R}$, und für die zu A inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

  folglich ist auch A^{-1} symmetrisch.
- Es ist

$$\left(C^\top AC\right)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top AC;$$

  folglich ist $C^\top AC$ eine symmetrische Matrix.

7. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$U = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top = -A\right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist:

- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $0^\top = 0 = -0$, also $0 \in U$.
- Für alle A, $B \in U$ gilt A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^\top = -A$ und $B^\top = -B$, so daß sich für $A + B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dann

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top = (-A) + (-B) = -(A+B),$$

  also $A + B \in U$ ergibt.
- Für alle $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^\top = -A$, so daß sich für $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dann

$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot (-A) = -(\lambda \cdot A),$$

  also $\lambda \cdot A \in U$ ergibt.

Damit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Wir beweisen die Formel $\det(A_{n+2}) = s^2 \cdot \det(A_n)$ mit Hilfe der Laplace-Entwicklung der Determinante.

$$\det(A_{n+2}) = \begin{vmatrix} 0 & -s & 0 & \dots & 0 \\ s & 0 & -s & \dots & 0 \\ 0 & s & & & \\ \vdots & \vdots & & A_n & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix} \overset{\text{erste}}{\underset{\text{Spalte}}{=}} (-1)^{2+1} \cdot s \cdot \begin{vmatrix} -s & 0 & \dots & 0 \\ s & & & \\ \vdots & & A_n & \\ 0 & & & \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{erste}}{\underset{\text{Zeile}}{=}} -s \cdot \big((-1)^{1+1} \cdot (-s) \cdot \det(A_n)\big) = s^2 \det(A_n).$$

c) Wir zeigen „$\Longleftrightarrow$“ durch den Nachweis von zwei Implikationen:

- Für „$\Longrightarrow$“ zeigen wir die dazu logisch gleichwertige Kontraposition „n gerade $\Longrightarrow U \not\subseteq W$“ und betrachten für ein gerades $n \in \mathbb{N}$ die Matrix A_n aus b) speziell für $s = 1$: wegen $A_n^\top = -A_n$ ist $A_n \in U$, und mit der in b) bewiesenen Rekursionsformel folgt

$$\det(A_n) = \ldots \underset{n \text{ gerade}}{=} \det(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

  also $A_n \notin W$; damit ist $U \not\subseteq W$.
- Für „$\Longleftarrow$“ sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Für jedes $A \in U$ gilt

$$\det(A) = \det(A^\top) \underset{A \in U}{=} \det(-A) = \det((-1) \cdot A) \underset{A \in \mathbb{R}^{n \times n}}{=}$$

$$\overset{(-1) \text{ aus jeder}}{\underset{\text{der } n \text{ Zeilen}}{=}} (-1)^n \cdot \det(A) \underset{n \text{ ungerade}}{=} -\det(A),$$

  also $2\det(A) = 0$ bzw. $\det(A) = 0$, mithin $A \in W$; damit ist $U \subseteq W$.

8. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a + b - c = 0 \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist:

- Für die Nullmatrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $0 + 0 - 0 = 0$, also $0 \in U$.
- Für alle $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $a_1 + b_1 - c_1 = 0$ und $a_2 + b_2 - c_2 = 0$, so daß für $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-(c_1+c_2) = (a_1 + b_1 - c_1)+(a_2 + b_2 - c_2) = 0+0 = 0$ dann $A + B \in U$ folgt.
- Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $a + b - c = 0$, so daß für $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen $\lambda \cdot a + \lambda \cdot b - \lambda \cdot c = \lambda \cdot (a + b - c) = \lambda \cdot 0 = 0$ schon $\lambda \cdot A \in U$ folgt.

Damit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei U genau aus den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & d \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B_3}$$

mit $a,\ b,\ d \in \mathbb{R}$ besteht; damit bilden $B_1,\ B_2,\ B_3$ ein Erzeugendensystem von U. Für alle $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; damit sind $B_1,\ B_2,\ B_3$ auch linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U, und es gilt $\dim(U) = 3$. Wir können nun $B_1,\ B_2,\ B_3$ mit jedem $B_4 \notin U$ zu einer Basis $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ergänzen, also etwa $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $W = \langle B_4 \rangle$ gemäß

$$U + W = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad U \cap W = \{0\}$$

ein U komplementärer Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3$ und $W = \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$ von $\mathbb{R}^4$, wenn er sowohl Linearkombination von $u_1,\ u_2,\ u_3$ als auch Linearkombination von $w_1,\ w_2$ ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum homogenen linearen Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $A = (u_1, u_2, u_3, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{4\times 5}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-4\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{2\,\alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2 + (-\alpha) \cdot u_3}_{x \in U} = x = \underbrace{\alpha \cdot w_1 + \alpha \cdot w_2}_{x \in W},$$

also

$$x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

ergibt. Damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$, weswegen etwa der Vektor v wegen $v \neq 0$ eine Basis von $U \cap W$ ist.

9. a) Im $\mathbb{R}^4$ ist der von den Vektoren u_1, u_2, u_3, u_4, $u_5 \in \mathbb{R}^4$ aufgespannte Unterraum $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ zu betrachten; zum Nachweis, daß schon u_1, u_2, u_3, u_4 ein Erzeugendensystem von U bilden, ist $u_5 \in \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ zu zeigen. Mit der Hilfsmatrix $A = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ergibt sich

$$(A \mid u_5) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{-\text{II} \leftrightarrow -\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & t & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II},\ \text{IV}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-3\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 12 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & t-1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{7}\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 12 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & t-1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}+4\text{IV},\ \text{III}-6\text{IV}}{\overset{\text{I}-12\text{IV}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

damit ist unabhängig von $t \in \mathbb{R}$ also

$$u_5 = (-1) \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4 \in \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle.$$

b) Wegen $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ ergibt sich gemäß a)

$$\dim U = \operatorname{Rang}(A) = \begin{cases} 4, & \text{falls } t \neq 1, \\ 3, & \text{falls } t = 1. \end{cases}$$

c) Im Fall $t = 1$ ist $\dim U = 3$ gemäß b); wegen

$$A \underset{\text{a)}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III} \leftrightarrow \text{IV}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pivots in der ersten, zweiten und vierten Spalte sind u_1, u_2, u_4 eine Basis von U.

Für $t \neq 1$ sind u_1, u_2, u_3, u_4 wegen $\dim\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle = 4$ gemäß b) dagegen linear unabhängig, so daß u_1, u_2, u_4 mit einem u_3 für $t \neq 1$, also etwa mit

$$v \underset{t=0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

zu einer Basis u_1, u_2, u_4, v von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden kann.

10. Für die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ gilt

$$\begin{aligned}
(A|b) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I},\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II},\ \mathrm{IV}+\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);
\end{aligned}$$

damit ergibt sich:

a) Für die Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ gilt $\mathrm{Rang}(A) = 2$, so daß sich für die Dimension des Lösungsraums L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ dann $\dim L_0 = 5 - 2 = 3$ ergibt. Eine Basis von L_0 erhält man etwa dadurch, daß man für die drei freien Variablen x_3, x_4 und x_5 die Wahl $x_3 = 1$ mit $x_4 = x_5 = 0$ bzw. $x_4 = 1$ mit $x_3 = x_5 = 0$ bzw. $x_5 = 1$ mit $x_3 = x_4 = 0$ trifft; dementsprechend bilden die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L_0.

b) Wegen $\mathrm{Rang}(A|b) = 2 = \mathrm{Rang}(A)$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar, und eine partikuläre Lösung x_p erhält man etwa durch die Wahl der freien Variablen $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, wodurch sich die gebundenen Variablen zu $x_1 = 2$ und $x_2 = 2$ errechnen. Die allgemeine Lösung von $A \cdot x = b$, also die Lösungsmenge L des Gleichungssystems, ist dann

$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $M = (e_1, e_2, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ ist wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} 1^5 = 1 \neq 0$$

invertierbar, so daß ihre Spalten e_1, e_2, b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^5$ sind.

11. In Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad b_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

zu betrachten; dabei gilt

$$\begin{aligned}
(A_t \mid b_t) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -2t & t & 4+t & 0 \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t & 2 \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t & 3-t^2 \end{array}\right) \\
\underset{\text{III}+2t\text{I, IV}-3\text{I}}{\overset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow}} &\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & -4-4t & 2 & 2t & 2t+2 \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right) \\
\underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} &\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & t & t & -t^2 \end{array}\right) \\
\underset{\text{IV}+\frac{1}{2}\text{III}}{\rightsquigarrow} &\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2-2t & 1+t & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -2t & -2 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t-t^2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

a) Gemäß obiger Rechnung ist

$$A_t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2(1+t) & 1+t & 1+t \\ 0 & 0 & -2t & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix};$$

für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ist $-2(1+t) \neq 0$ und $-2t \neq 0$ und $t - 1 \neq 0$, so daß sich zunächst in diesen Fällen $\operatorname{Rang}(A_t) = 4$ ergibt.
Für die verbleibenden drei Parameterwerte erhält man

$$A_{-1} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{Rang}(A_{-1}) = 3$, und

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{Rang}(A_0) = 3$, und

$$A_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{Rang}(A_1) = 3$.

b) Der Kern der zu betrachtenden linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = A_0 \cdot x,$$

ist gemäß

$$\operatorname{Kern}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_0 \cdot x = 0\right\}$$

der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_0 \cdot x = 0$; gemäß a) ist

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.

c) Gemäß a) besitzt für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ die Matrix A_t den vollen Rang 4, so daß hier das inhomogene lineare Gleichungssystem $A_t \cdot x = b_t$ wegen

$$\operatorname{Rang}(A_t \mid b_t) = 4 = \operatorname{Rang}(A_t)$$

sogar eindeutig lösbar ist; für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- für $t = -1$ ist

$$(A_{-1} \mid b_{-1}) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right),$$

und wegen des Widerspruchs in der zweiten Zeile ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A_{-1} \cdot x = b_{-1}$ nicht lösbar.

- für $t = 0$ ist

$$(A_0 \mid b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und wegen $\mathrm{Rang}(A_0 \,|\, b_0) = 3 = \mathrm{Rang}(A_0)$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A_0 \cdot x = b_0$ lösbar.

- für $t = 1$ ist

$$(A_1 \mid b(1)) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und wegen $\mathrm{Rang}(A_1 \,|\, b(1)) = 3 = \mathrm{Rang}(A_1)$ ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $A_1 \cdot x = b(1)$ lösbar.

12. a) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & t \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(0 + 0 + t^2\right) - (0 + 0 + 4) = t^2 - 4$$

ist dies genau für

$$t^2 - 4 \neq 0 \iff t^2 \neq 4 \iff t \neq \pm 2$$

der Fall. Für $t = 2$ ist $v_2 = v_3$ und damit

$$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = 0,$$

für $t = -2$ ist $v_2 + v_3 = 2\, v_1$ und damit

$$(-2) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$$

eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus den dann linear abhängigen Vektoren v_1, v_2, v_3.

b) Im Hinblick auf a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $t \neq \pm 2$ sind $v_1,\ v_2,\ v_3$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

- Für $t = 2$ gilt $v_2 = v_3$; wegen $w_2 \neq w_3$ kann es überhaupt keine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ geben, insbesondere existiert damit auch keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.
- Für $t = -2$ liegt die nichttriviale Linearkombination

$$-2\,v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

des Nullvektors aus den Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$ vor; dies entspricht genau

$$-2\,w_1 + w_2 + w_3 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die linear unabhängigen Vektoren $v_1,\ v_2$ lassen sich nun zu einer Basis $v_1,\ v_2,\ v_4$ von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, und für jede Wahl des Vektors $w_4 \in \mathbb{R}^3$ gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine (zu w_4 eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$f_{w_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f_{w_4}(v_1) = w_1,\ f_{w_4}(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f_{w_4}(v_4) = w_4,$$

welche dann auch

$$f_{w_4}(v_3) = f_{w_4}(2\,v_1 - v_2) = 2\,f_{w_4}(v_1) - f_{w_4}(v_2) = 2\,w_1 - w_2 = w_3$$

erfüllt. Folglich gibt es in diesem Fall insgesamt unendlich viele lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

13. a) Die gegebene Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix},$$

ordnet jedem Polynom

$$v = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

mit $\mathrm{Grad}(v) \leq 2$ eine Matrix der Gestalt

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

zu. Für alle

$$v = a_0 + a_1X + a_2X^2, \qquad w = b_0 + b_1X + b_2X^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

gilt

$$v + w = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, X + (a_2 + b_2)\, X^2$$

und damit

$$\begin{aligned} f(v + w) &= \begin{pmatrix} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + 2\,(a_2 + b_2) & a_2 + b_2 \\ -(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) & (a_1 + b_1) + 3\,(a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 + 2\,a_2) + (b_0 + b_1 + 2\,b_2) & a_2 + b_2 \\ (-a_1 + a_2) + (-b_1 + b_2) & (a_1 + 3\,a_2) + (b_1 + 3\,b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 + 2\,b_2 & b_2 \\ -b_1 + b_2 & b_1 + 3\,b_2 \end{pmatrix} \\ &= f(v) + f(w); \end{aligned}$$

damit ist f additiv. Für alle

$$v = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\lambda \cdot v = (\lambda\, a_0) + (\lambda\, a_1)\, X + (\lambda\, a_2)\, X^2$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot v) &= \begin{pmatrix} \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 + 2\ (\lambda\, a_2) & \lambda\, a_2 \\ -\ (\lambda\, a_1) + \lambda\, a_2 & \lambda\, a_1 + 3\ (\lambda\, a_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\ (a_0 + a_1 + 2\,a_2) & \lambda\, a_2 \\ \lambda\ (-a_1 + a_2) & \lambda\ (a_1 + 3\,a_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot f(v); \end{aligned}$$

damit ist f homogen. Folglich ist f eine lineare Abbildung.

b) Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\,\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_2 = 0$ und folglich $\lambda_4 = 0$; ferner erhalten wir aus den anderen beiden Gleichungen $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 + 2\,\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ durch Differenzbildung $\lambda_3 = 0$ und folglich $\lambda_1 = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$; damit sind B_1, B_2, B_3, B_4 linear unabhängig, und wegen $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$ schon eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Wegen

$$\begin{array}{rcccl}
f(1) & \underset{a_0=1,\,a_1=0,\,a_2=0}{=} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = 2 \cdot B_1 + \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot B_2 + (-1) \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 \\
f(X) & \underset{a_0=0,\,a_1=1,\,a_2=0}{=} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & = 0 \cdot B_1 + (-1) \cdot B_2 + \phantom{(-1)\cdot{}} 0 \cdot B_3 + 1 \cdot B_4 \\
f(X^2) & \underset{a_0=0,\,a_1=0,\,a_2=1}{=} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & = 1 \cdot B_1 + \phantom{(-1)\cdot{}} 1 \cdot B_2 + \phantom{(-1)\cdot{}} 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4
\end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

14. a) Für alle p, $q \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{array}{rcl}
f(p+q) & = & (p+q)' - (X+1) \cdot (p+q)'' \\
& = & (p' + q') - (X+1) \cdot (p'' + q'') \\
& = & (p' + q') - ((X+1) \cdot p'' + (X+1) \cdot q'') \\
& = & (p' - (X+1) \cdot p'') + (q' - (X+1) \cdot q'') \\
& = & f(p) + f(q);
\end{array}$$

damit ist f additiv; ferner gilt für alle $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl}
f(\lambda \cdot p) & = & (\lambda \cdot p)' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p)'' \\
& = & \lambda \cdot p' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p'') \\
& = & \lambda \cdot (p' - (X+1) \cdot p'') \\
& = & \lambda \cdot f(p);
\end{array}$$

damit ist f auch homogen, insgesamt also linear.

b) Wegen

$$\begin{array}{rcrcrrr}
f(1) & = & 0 - (X+1) \cdot 0 & = & 0 \cdot 1 + & 0 \cdot X + & 0 \cdot X^2 \\
f(X) & = & 1 - (X+1) \cdot 0 & = & 1 \cdot 1 + & 0 \cdot X + & 0 \cdot X^2 \\
f(X^2) & = & 2X - (X+1) \cdot 2 & = & (-2) \cdot 1 + & 0 \cdot X + & 0 \cdot X^2 \\
f(X^3) & = & 3X^2 - (X+1) \cdot 6X & = & 0 \cdot 1 + & (-6) \cdot X + & (-3) \cdot X^2
\end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Wegen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{6}\cdot \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\ell_M)$ sowie

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\ell_M)$; damit ist

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 1, \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 &= 2X + X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ sowie

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 &= 1, \\ 0 \cdot 1 - 6 \cdot X - 3 \cdot X^2 &= -6X - 3X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

15. a) Für die gegebene Abbildungsmatrix gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $r = \mathrm{Rang}(A) = 2$; folglich erhält man

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = 4 - r = 2 \qquad \text{und} \qquad \dim \mathrm{Bild}(f) = r = 2.$$

Genauer gilt:

- $U = \mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den beiden freien Variablen x_3 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

  eine Basis von U.

- $W = \mathrm{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da x_1 und x_2 die beiden gebundenen Variablen sind, ist
$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
eine Basis von W.

b) Mit $b_1 = e_1$ und $b_2 = e_2$ sowie $b_3 = u_1$ und $b_4 = u_2$ ist b_1, b_2, b_3, b_4 wegen
$$\det(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \neq 0$$
eine Basis von $\mathbb{R}^4$, und mit $c_1 = w_1$, $c_2 = w_2$ und $w_3 = e_3$ ist c_1, c_2, c_3 wegen
$$\det(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wegen
$$\begin{array}{ccccccccccc} f(b_1) & = & A \cdot e_1 & = & w_1 & = & 1 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_2) & = & A \cdot e_2 & = & w_2 & = & 0 \cdot c_1 & + & 1 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_3) & = & A \cdot u_1 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\ f(b_4) & = & A \cdot u_2 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \end{array}$$
besitzt die darstellende Matrix von f bezüglich dieser beiden Basen die Gestalt
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

16. Wir zeigen, daß die Eigenschaften (i), (iii) und (v) zueinander äquivalent sind:

„(i) $\Longrightarrow$ (v)“: Ist f injektiv, so gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ und damit
$$\dim \mathrm{Kern}(f) = 0.$$

„(v) $\Longrightarrow$ (iii)“: Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt
$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f).$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich
$$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim \mathrm{Bild}(f) = 0,$$
also $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$, und folglich ist f injektiv.

Wir zeigen ferner, daß die Eigenschaften (ii), (iv) und (vi) jeweils zueinander äquivalent sind:

„(ii) $\Longrightarrow$ (iv)“: Ist f surjektiv, so gilt $\operatorname{Bild}(f) = W$ und damit

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim W.$$

„(iv) $\Longrightarrow$ (vi)“: Wie oben ergibt sich aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V - \dim W.$$

„(vi) $\Longrightarrow$ (ii)“: Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W,$$

woraus wegen $\operatorname{Bild}(f) \subseteq W$ schon $\operatorname{Bild}(f) = W$ folgt; damit ist f surjektiv.