MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Klausur
27.02.2020

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Lösungsvorschlag —

1. a) Für das in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & \alpha\,x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & \alpha \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha \mid b_\alpha)$ und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\overset{\text{II}+\text{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \end{array}\right);$$

dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\operatorname{Rang}(A_\alpha \mid b_\alpha) = 4 = \operatorname{Rang}(A_\alpha)$; damit ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, und es gilt
  - über (IV) $\alpha \cdot x_4 = \alpha$, wegen $\alpha \neq 0$ also $x_4 = 1$, damit
  - über (III) $x_3 + (-\alpha+1) \cdot x_4 = 0$, also $x_3 = -(-\alpha+1) \cdot x_4 = \alpha - 1$, damit
  - über (II) $x_2 + (-\alpha-1) \cdot x_4 = -1$, also $x_2 = -1 - (-\alpha-1) \cdot x_4 = \alpha$, damit
  - über (I) $x_1 - x_4 = 0$, also $x_1 = x_4 = 1$;

  es ergibt sich die Lösungsmenge

$$L_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $\alpha = 0$, gilt $\operatorname{Rang}(A_0 \mid b_0) = 3 = \operatorname{Rang}(A_0)$; damit ist das lineare Gleichungssystem mehrdeutig lösbar, und mit der freien Unbestimmten $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gilt
  - über (III) $\quad x_3 + x_4 = 0$, also $x_3 = -x_4 = -\lambda$, damit
  - über (II) $\quad x_2 - x_4 = -1$, also $x_2 = -1 + x_4 = -1 + \lambda$, damit
  - über (I) $\quad x_1 - x_4 = 0$, also $x_1 = x_4 = \lambda$;

  es ergibt sich die Lösungsmenge

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -1+\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ergibt sich zunächst

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{III}+2\text{I} \\ \text{IV}-2\text{I} \\ \text{V}+\text{I}}}{\overset{\text{Zeilen}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{3+2} \cdot (-6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{Zeilen}}{=}}$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 6 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7) = 42.$$

Damit kann es keine Matrix $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $\quad PAP = -A \quad$ geben; denn ansonsten erhält man $\det(PAP) = \det(-A)$, wobei sich für die linke Seite unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes

$$\det(P \cdot A \cdot P) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = 42 \cdot (\det(P))^2 \geq 0$$

und für die rechte Seite wegen der Linearität der Determinante in jeder Zeile

$$\det(-A) = \det((-1) \cdot A) = (-1)^5 \cdot \det(A) = -42 < 0,$$

insgesamt also in Widerspruch ergibt.

2. a)
- Eine Teilmenge U eines $\mathbb{R}$–Vektorraum V ist genau dann ein *Untervektorraum* von V, wenn sie die drei folgenden Eigenschaften erfüllt:
  - Es ist $U \neq \emptyset$; es gilt etwa $0_V \in U$.
  - Für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt $u_1 + u_2 \in U$.
  - Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.

- Für einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V definiert man die *Dimension* als

$$\dim(V) = \begin{cases} 0, & \text{falls } V = \{0_V\} \text{ der Nullraum ist,} \\ n & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist} \\ & \qquad \text{und eine Basis der Länge } n \text{ besitzt,} \\ \infty & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$$

b) Wir betrachten im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die Teilmenge

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M \cdot X = X^\top \right\};$$

dabei ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fest gewählte Matrix. Es gilt:

- Für die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$M \cdot O = O = O^\top,$$

also $O \in U$.

- Für alle $X_1,\, X_2 \in U$ gilt $X_1,\, X_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$M \cdot X_1 = X_1^\top \qquad \text{und} \qquad M \cdot X_2 = X_2^\top;$$

damit ist $X_1 + X_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$M \cdot (X_1 + X_2) = M \cdot X_1 + M \cdot X_2 = X_1^\top + X_2^\top = (X_1 + X_2)^\top,$$

also $X_1 + X_2 \in U$.

- Für alle $X \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$M \cdot X = X^\top;$$

damit ist $\lambda \cdot X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$M \cdot (\lambda \cdot X) = \lambda \cdot (M \cdot X) = \lambda \cdot X^\top = (\lambda \cdot X)^\top,$$

also $\lambda \cdot X \in U$.

Damit ist U nach dem Unterraumkriterium ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Wir betrachten nun den Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ speziell für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

für alle

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dabei

$$M \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 4\,x_3 & -x_2 + 4\,x_4 \\ -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$X^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} X \in U \quad & \iff \quad M \cdot X = X^\top \\ & \iff \quad \begin{pmatrix} -x_1 + 4\,x_3 & -x_2 + 4\,x_4 \\ -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \\ & \iff \quad \left\{ \begin{array}{lll} -x_1 + 4\,x_3 = x_1 & \text{und} & -x_2 + 4\,x_4 = x_3 \\ -x_3 = x_2 & \text{und} & -x_4 = x_4 \end{array} \right\} \\ & \iff \quad \left\{ \begin{array}{lll} 4\,x_3 = 2\,x_1 & \text{und} & -x_2 = x_3 \\ -x_3 = x_2 & \text{und} & x_4 = 0 \end{array} \right\} \\ & \iff \quad \big(x_1 = 2\,x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = -x_3 \quad \text{und} \quad x_4 = 0\big) \\ & \iff \quad X = \begin{pmatrix} 2\,x_3 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist U der von $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$; wegen $B \neq O$ ist B sogar eine Basis von U, und es gilt $\dim(U) = 1$.

3. a)
- Für $\mathbb{R}$–Vektorräume V und W heißt eine Abbildung $f : V \to W$ *linear,* wenn sie additiv und homogen ist; dabei bedeutet
  - *additiv,* daß $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1,\, v_2 \in V$ gilt, und
  - *homogen,* daß $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.
- Das *Prinzip der linearen Fortsetzung* besagt: sind $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_n$ beliebige Vektoren in W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b_1) = w_1, \ldots, f(b_n) = w_n$; dabei gilt:
  - f ist surjektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ ist ein Erzeugendensystem von W.
  - f ist injektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig.

b) Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ sind die Vektoren

$$p_1 = X^2 + 2X + 3, \quad p_2 = 2X^2 + 3X + 1, \quad p_3 = 3X^2 + X + 2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

gegeben; zu einem Polynom $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ betrachten wir den Koordinatenvektor $q(p) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis X^2, X, 1 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, also

$$q(p_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad q(p_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q(p_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Hilfsmatrix $B = (q(p_1), q(p_2), q(p_3)) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \big(6 + 6 + 6\big) - \big(27 + 1 + 8\big) = 18 - 36 = -18 \neq 0$$

invertierbar; damit bilden ihre Spalten $q(p_1)$, $q(p_2)$, $q(p_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so daß p_1, p_2, p_3 eine Basis von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ sind. Folglich gibt es gemäß dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jede Wahl eines $\mathbb{R}$–Vektorraums W und jede Vorgabe von Vektoren w_1, w_2, $w_3 \in W$ genau eine lineare Abbildung $f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to W$ mit $f(p_1) = w_1$, $f(p_2) = w_2$ und $f(p_3) = w_3$;, hier ist speziell $W = \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie die Vektoren $w_1 = M_1$, $w_2 = M_2$ und $w_3 = M_3$ für

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit dem reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$.
Wegen $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$ können die drei Vektoren M_1, M_2, M_3 kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sein, so daß f (unabhängig von t) nicht surjektiv ist. Zu einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir ihren Koordinatenvektor $k(M) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, also

$$k(M_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k(M_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k(M_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Für die Hilfsmatrix $C = (k(M_1), k(M_2), k(M_3)) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I},\ \text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & t-3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+3\text{II}}{\overset{\text{III}+4\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t+5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad M_1,\ M_2,\ M_3 \text{ linear unabhängig} \\ &\Longleftrightarrow \quad k(M_1),\ k(M_2),\ k(M_3) \text{ linear unabhängig} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(C) = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad t+5 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \neq -5. \end{aligned}$$

4. Für die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

wird die zugehörige lineare Abbildung

$$f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_s(x) = A_s \cdot x,$$

betrachtet.

a) Wegen

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & s \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & s-3 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$r_s = \operatorname{Rang}(A_s) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 1, \\ 3, & \text{falls } s \neq 1, \end{cases}$$

mit $\dim(\operatorname{Kern}(f_s)) = 4 - r_s$ und $\dim(\operatorname{Bild}(f_s)) = r_s$; genauer gilt:

- $\operatorname{Kern}(f_s) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_s \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = 0$ überein; damit erhalten wir für $\operatorname{Kern}(f_s)$ im Fall $s = 1$ über die freien Variablen x_3 und x_4 die Basis

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

  sowie im Fall $s \neq 1$ über die freie Variable x_3 die Basis

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- $\operatorname{Bild}(f_s) = \{A_s \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Abbildungsmatrix A_s überein; damit erhalten wir für $\operatorname{Bild}(f_s)$ im Falle $s = 1$ über die Pivots in der ersten und zweiten Spalte die Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

  sowie im Falle $s \neq 1$ über die Pivots in der ersten, zweiten und vierten Spalte die Basis

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Die beiden gegebenen Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sind keine skalaren Vielfachen voneinander, mithin linear unabhängig, und damit eine Basis des von ihnen erzeugten Unterraums $V = \langle b_1, b_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Für die drei gegebenen Vektoren

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix $B = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, und wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \big((-1)+0+0\big) - \big(1+0+(-1)\big) = -1 \neq 0$$

ist $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar; damit ist c_1, c_2, c_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für die spezielle Wahl von $s = 3$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$f : V \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A_3 \cdot x;$$

wegen

$$f(b_1) = A_3 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3$$

und

$$f(b_2) = A_3 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1,$$

also

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(b_1) & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 1 \cdot c_3 \\ f(b_2) & = & 1 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3, \end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

die darstellende Matrix von $f : V \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis b_1, b_2 von V und der Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$.