MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Klausur
27.02.2020

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. a) Man bestimme für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 2\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & - & \alpha\,x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & \alpha \end{array}$$

die Lösungsmenge L_α in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$. (3)

b) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

bestimme man $\det(A)$ und entscheide mit Begründung, ob es eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $PAP = -A$ gibt. (3)

2. a) Für einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V formuliere man das Unterraumkriterium und definiere die Dimension $\dim(V)$ von V. (2)

b) Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachte man die Teilmenge

$$U = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M \cdot X = X^\top \right\};$$

dabei ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine fest gewählte Matrix.

- Man zeige, daß U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. (2)
- Man bestimme für die Wahl der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Dimension $\dim(U)$ und gebe eine Basis von U an. (2)

3. a)
- Für eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen den $\mathbb{R}$–Vektorräumen V und W definiere man den Begriff „f ist linear.“. (1)
- Man formuliere das Prinzip der linearen Fortsetzung. Unter welcher Bedingung ist die dadurch definierte Abbildung surjektiv bzw. injektiv? (2)

b) Gegeben seien

$$p_1 = X^2 + 2X + 3, \quad p_2 = 2X^2 + 3X + 1, \quad p_3 = 3X^2 + X + 2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

sowie

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ t & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

dabei ist $t \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Man zeige, daß es genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{mit} \quad f(p_1) = M_1, \quad f(p_2) = M_2, \quad f(p_3) = M_3$$

gibt, und untersuche f in Abhängigkeit vom Parameter t auf Surjektivität und Injektivität. (3)

4. Gegeben sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4};$$

dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Für die lineare Abbildung

$$f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_s(x) = A_s \cdot x,$$

bestimme man in Abhängigkeit vom Parameter s eine Basis von $\mathrm{Kern}(f_s)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(f_s)$. (3)

b) Es sei nun $s = 3$ gewählt. Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

und

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

ferner sei $V = \langle b_1, b_2 \rangle$ der von b_1, b_2 erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$. Man zeige, daß b_1, b_2 eine Basis von V sowie c_1, c_2, c_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und bestimme die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$f : V \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A_3 \cdot x,$$

bezüglich der Basis b_1, b_2 von V und der Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$. (3)