MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 14
03.02.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

53. a) Für $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid B');$$

damit ist B invertierbar mit $B^{-1} = B'$, und folglich bilden die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Ferner ist $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, und folglich bilden die Vektoren c_1, c_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Wegen

$$\ell_A(b_1) = A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot c_1 + (-1) \cdot c_2,$$

$$\ell_A(b_2) = A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-6) \cdot c_1 + 4 \cdot c_2,$$

$$\ell_A(b_3) = A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (-15) \cdot c_1 + 10 \cdot c_2$$

gilt für die darstellende Matrix M von ℓ_A bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$ gemäß der Definition

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Alternativ ergibt sich die Matrix M auch über die Formel

$$M = C^{-1}AB = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

c) Nun ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$; damit gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f(b_2) &= (-2) \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ f(b_3) &= 1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Abbildungsmatrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A'}$ ergibt sich also

$$A'\,B = A'\,(b_1, b_2, b_3) = (A'\,b_1, A'\,b_2, A' b_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = D$$

und damit

$$A' = D\,B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ läßt sich die Matrix A' auch über die Formel $A = C^{-1} A' B$ und damit

$$\begin{aligned} A' = CAB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

berechnen.

54. Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + c & 2\,b & 0 \\ 0 & b + 4\,c & 5\,d \end{pmatrix}.$$

a) Wir weisen die Linearität von f anhand der Definition nach:

- Für alle

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit

$$\begin{aligned}
f(A_1 + A_2) = f \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} =& \\
= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2) & 2\,(b_1 + b_2) & 0 \\ 0 & (b_1 + b_2) + 4\,(c_1 + c_2) & 5\,(d_1 + d_2) \end{pmatrix} =& \\
= \begin{pmatrix} (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) & 2\,b_1 + 2\,b_2 & 0 \\ 0 & (b_1 + 4\,c_1) + (b_2 + 4\,c_2) & 5\,d_1 + 5\,d_2 \end{pmatrix} =& \\
= \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & 2\,b_1 & 0 \\ 0 & b_1 + 4\,c_1 & 5\,d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + c_2 & 2\,b_2 & 0 \\ 0 & b_2 + 4\,c_2 & 5\,d_2 \end{pmatrix} =& \\
= f \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = f(A_1) + f(A_2);&
\end{aligned}$$

damit ist f additiv.

- Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ist

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot A) &= f \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot c) & 2\,(\lambda \cdot b) & 0 \\ 0 & (\lambda \cdot b) + 4\,(\lambda \cdot c) & 5\,(\lambda \cdot d) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a + c) & \lambda \cdot (2\,b) & 0 \\ 0 & \lambda \cdot (b + 4\,c) & \lambda \cdot (5\,d) \end{pmatrix} = \\
&= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a + c & 2\,b & 0 \\ 0 & b + 4\,c & 5\,d \end{pmatrix} = \lambda \cdot f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(A);
\end{aligned}$$

damit ist f homogen.

Folglich ist f insgesamt eine lineare Abbildung.

b) Wir wählen die Standardbasen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 3}$; wegen

$$\begin{aligned}
f(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1\cdot C_1 + 0\cdot C_2 + 0\cdot C_3 + 0\cdot C_4 + 0\cdot C_5 + 0\cdot C_6 \\
f(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 0\cdot C_1 + 2\cdot C_2 + 0\cdot C_3 + 0\cdot C_4 + 1\cdot C_5 + 0\cdot C_6 \\
f(B_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} &= 1\cdot C_1 + 0\cdot C_2 + 0\cdot C_3 + 0\cdot C_4 + 4\cdot C_5 + 0\cdot C_6 \\
f(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} &= 0\cdot C_1 + 0\cdot C_2 + 0\cdot C_3 + 0\cdot C_4 + 0\cdot C_5 + 5\cdot C_6
\end{aligned}$$

ist

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 4}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $B_1, \ldots, B_4$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $C_1, \ldots, C_6$ von $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

c) Wegen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}\leftrightarrow\text{VI}}{\overset{\text{III}\leftrightarrow\text{V}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\frac{1}{2}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(F) = 4$ und damit

$$\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) - \mathrm{Rang}(F) = 4 - 4 = 0;$$

folglich ist $\mathrm{Kern}(f) = \{O\}$ und damit f injektiv.

55. Der gegebene Endomorphismus $f : V \to V$ des Vektorraums V besitzt wegen

$$\begin{array}{rclcrcrcrcr}
f(b_1) & = & 0 & = & 0\cdot b_1 & + & 0\cdot b_2 & + & 0\cdot b_3 & + & 0\cdot b_4 \\
f(b_2) & = & 2\,b_2 & = & 0\cdot b_1 & + & 2\cdot b_2 & + & 0\cdot b_3 & + & 0\cdot b_4 \\
f(b_3) & = & b_4 & = & 0\cdot b_1 & + & 0\cdot b_2 & + & 0\cdot b_3 & + & 1\cdot b_4 \\
f(b_4) & = & 6\,b_2 - b_4 & = & 0\cdot b_1 & + & 6\cdot b_2 & + & 0\cdot b_3 & + & (-1)\cdot b_4
\end{array}$$

bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

entsprechend betrachten wir zu einem Vektor

$$v = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \alpha_3 \cdot b_3 + \alpha_4 \cdot b_4 \in V$$

seinen Koordinatenvektor $p(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4.

Wegen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man:

- $\mathrm{Kern}(\ell_M) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \ell_M(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid M \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $M \cdot x = 0$ überein; da x_1 und x_4 die freien Variablen sind, ist

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eine Basis von} \quad \mathrm{Kern}\,(\ell_M)$$

  und folglich $u_1 = b_1$, $u_2 = -3\, b_2 + b_3 + b_4$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

- $\mathrm{Bild}(\ell_M) = \{\ell_M(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\} = \{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ überein; da x_2 und x_3 die gebundenen Variablen sind, ist

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eine Basis von} \quad \mathrm{Bild}\,(\ell_M)$$

  und folglich $w_1 = 2\, b_2$, $w_2 = b_4$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Wegen $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0_V\}$ ist f nicht injektiv, und wegen $\mathrm{Bild}(f) \subsetneq V$ ist f nicht surjektiv.

56. a) Da f injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Kern}(f) = \{0_W\} \qquad \text{und damit} \qquad \dim \mathrm{Kern}(f) = 0;$$

da f nicht surjektiv ist, gilt

$$\mathrm{Bild}(f) \subsetneq W \qquad \text{und damit} \qquad \dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W).$$

Mit Hilfe der Dimensionsformel erhält man daher

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W).$$

b) Wir nehmen zum Widerspruch $\dim(V) \leq \dim(W)$ an. Seien

$$n = \dim(V) \qquad \text{und} \qquad m = \dim(W),$$

und wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V sowie eine Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W. Damit gibt es eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$f : V \to W \qquad \text{mit} \qquad f(v_1) = w_1, \quad \ldots, \quad f(v_n) = w_n,$$

und da die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, ist f injektiv im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt aber $\dim(V) > \dim(W)$.