MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}+\text{III}}{\overset{\text{I}+\text{III}}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I}+\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\text{III}}{\overset{(-1)\cdot\text{II}}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = (E_3|B');$$

Damit ist B invertierbar mit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Folglich bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$. Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_A$ gilt also $A \cdot v_1 = w_1$, $A \cdot v_2 = w_2$ und $A \cdot v_3 = w_3$; mit $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ergibt sich

$$A \cdot B = A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3) = (w_1, w_2, w_3) = C,$$

wegen $B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ damit

$$A = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

50. a) Wegen

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & s-2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

gilt

$$\dim \operatorname{Bild}(f_s) = \operatorname{Rang}(A_s) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 0, \\ 3, & \text{falls } s \neq 0. \end{cases}$$

Die lineare Abbildung $f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann surjektiv, wenn

$$\dim \operatorname{Bild}(f_s) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

gilt, damit also genau für $s \neq 0$. In diesen Fällen ist x_3 die einzige freie Unbestimmte des homogenen linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = 0$, so daß wir gemäß obiger Rechnung

$$\operatorname{Kern}(f_s) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten.

b) Für die Wahl $s = 0$ ergibt sich gemäß a) speziell

$$A_0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man:

- $\operatorname{Kern}(f_0) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f_0(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A_0 \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A_0 \cdot x = 0$ mit den freien Unbestimmten x_3 und x_4 überein; somit bilden

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

  eine Basis von $\operatorname{Kern}(f_0)$.
- $\operatorname{Bild}(f_0) = \{f_0(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\} = \{A_0 \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A_0 überein. Da x_1 und x_2 die gebundenen Unbestimmten von $A_0 \cdot x = 0$ sind, bilden

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\operatorname{Bild}(f_0)$.

51. Für alle A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) = (A+B) \cdot M - M \cdot (A+B) &= \\ = (A \cdot M + B \cdot M) - (M \cdot A + M \cdot B) &= \\ = (A \cdot M - M \cdot A) + (B \cdot M - M \cdot B) &= f(A) + f(B) \end{aligned}$$

und

$$f(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A) \cdot M - M \cdot (\lambda \cdot A) =$$
$$= \lambda \cdot (A \cdot M) - \lambda \cdot (M \cdot A) = \lambda \cdot (A \cdot M - M \cdot A) = \lambda \cdot f(A);$$

damit ist f linear. Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} f(A) &= A \cdot M - M \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 2\,a_{11} + 3\,a_{12} \\ a_{21} & 2\,a_{21} + 3\,a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} + 2\,a_{21} & a_{12} + 2\,a_{22} \\ 3\,a_{21} & 3\,a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für Kern(f) und Bild(f) ergibt sich:

- Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$A \in \mathrm{Kern}(f) \iff f(A) = 0 \iff$$
$$\iff \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$
$$\iff a_{21} = 0 \quad \text{und} \quad a_{22} = a_{11} + a_{12};$$

damit besteht Kern(f) genau aus den Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} + a_{12} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit a_{11}, $a_{12} \in \mathbb{R}$. Folglich bilden die beiden Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von Kern(f); wegen

$$\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

für alle λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sind B_1, B_2 auch linear unabhängig und damit sogar eine Basis von Kern(f). Insgesamt ergibt sich also

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = 2.$$

- Für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} f(A) = \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix} &= \\ &= (-2\,a_{21}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Folglich bilden die beiden Matrizen

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Bild}(f)$; wegen

$$\lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

  für alle $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ sind B_3, B_4 auch linear unabhängig und damit sogar eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Insgesamt ergibt sich also

$$\dim \mathrm{Bild}(f) = 2.$$

52. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$f(U) = \{f(u) \mid u \in U\} \subseteq W$$

ein Unterraum von W ist:

- Wegen $0_V \in U$ gilt
$$0_W = f\,(0_V) \in f(U).$$
- Für alle $w_1, w_2 \in f(U)$ gibt es $u_1, u_2 \in U$ mit $f(u_1) = w_1$, $f(u_2) = w_2$, und wegen $u_1 + u_2 \in U$ ergibt sich
$$w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) \underset{f \text{ additiv}}{=} f(u_1 + u_2) \in f(U).$$
- Für alle $w \in f(U)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es $u \in U$ mit $f(u) = w$, und wegen $\lambda \cdot u \in U$ ergibt sich
$$\lambda \cdot w = \lambda \cdot f(u) \underset{f \text{ homogen}}{=} f(\lambda \cdot u) \in f(U).$$

b) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$f^{-1}(X) = \{v \in V \mid f(v) \in X\}$$

ein Unterraum von V ist:

- Wegen $0_V \in V$ mit $f(0_V) = 0_W \in X$ gilt
$$0_V \in f^{-1}(X).$$

- Für alle v_1, $v_2 \in f^{-1}(X)$ gilt $f(v_1)$, $f(v_2) \in X$, und wegen $v_1 + v_2 \in V$ mit
$$f(v_1 + v_2) \underset{f \text{ additiv}}{=} f(v_1) + f(v_2) \in X$$
ergibt sich $v_1 + v_2 \in f^{-1}(X)$.
- Für alle $v \in f^{-1}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $f(v) \in X$, und wegen $\lambda \cdot v \in V$ mit
$$f(\lambda \cdot v) \underset{f \text{ homogen}}{=} \lambda \cdot f(v) \in X$$
ergibt sich $\lambda \cdot v \in f^{-1}(X)$.

c) Für „$\Longrightarrow$“ gilt zunächst $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$, und für „$\supseteq$“ sei $w \in W$; wegen der Surjektivität von f gibt es ein $v \in V$ mit $w = f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$.

Für „$\Longleftarrow$“ sei $w \in W$, und wegen $\mathrm{Bild}(f) = W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$; damit ist f surjektiv.

d) Für „$\Longrightarrow$“ gilt zunächst $\mathrm{Kern}(f) \supseteq \{0_V\}$, und für „$\subseteq$“ sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$; damit gilt $f(v) = 0_W = f(0_V)$, und wegen der Injektivität von f folgt $v = 0_V$.

Für „$\Longleftarrow$“ seien v_1, $v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$; mit der Linearität von f ergibt sich $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0_W$, also $v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(f)$, und wegen $\mathrm{Kern}(f) = \{0_V\}$ folgt $v_1 - v_2 = 0_V$, also $v_1 = v_2$.