MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Bearbeitungsvorschlag —

45. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).* Nach der Regel von Sarrus gilt

$$\det(A_{s,t}) = \begin{vmatrix} 0 & s & s+t \\ t & 0 & t \\ s+t & s & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \big(0 + s\,t\,(s+t) + (s+t)\,t\,s\big) - \big(0+0+0\big) = 2\,s\,t\,(s+t);$$

dies motiviert für die Bestimmung von $\mathrm{Rang}(A_{s,t})$ und $\dim(L_{s,t})$ die folgende Fallunterscheidung:

- Für $s \neq 0$ und $t \neq 0$ und $s+t \neq 0$ ist $\det(A_{s,t}) = 2\,s\,t\,(s+t) \neq 0$; damit ist die Matrix $A_{s,t} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ invertierbar, und es ist folglich $\mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 3$. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $A_{s,t} \cdot x = b$ die eindeutig bestimmte Lösung $x = A_{s,t}^{-1} \cdot b$, und es gilt $\dim(L_{s,t}) = 0$.
- Für $s = 0$ und $t = 0$ (und damit $s + t = 0$) ist $A_{s,t} = O$ die Nullmatrix mit $\mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 0$. Wegen $b \neq 0$ ist $\mathrm{Rang}(A_{s,t}\,|\,b) = 1 \neq \mathrm{Rang}(A_{s,t})$, so daß das lineare Gleichungssystem $A_{s,t} \cdot x = b$ keine Lösung besitzt; es ist also $L_{s,t} = \emptyset$.
- Für $s = 0$ und $t \neq 0$ (und damit $s + t \neq 0$) ist

$$(A_{s,t}\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\leadsto}$$
$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & -t & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  wegen $\mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 2 = \mathrm{Rang}(A_{s,t}\,|\,b)$ ist das lineare Gleichungssystem $A_{s,t} \cdot x = b$ lösbar, und es gilt $\dim(L_{s,t}) = 3 - \mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 1$.
- Für $s \neq 0$ und $t = 0$ (und damit $s + t \neq 0$) ist

$$(A_{s,t}\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & s & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & s & 0 & -1 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|c} s & s & 0 & -1 \\ 0 & s & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  wegen $\mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 2 = \mathrm{Rang}(A_{s,t}\,|\,b)$ ist das lineare Gleichungssystem $A_{s,t} \cdot x = b$ lösbar, und es gilt $\dim(L_{s,t}) = 3 - \mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 1$.

- Für $s \neq 0$ und $t \neq 0$ und $s+t=0$, also $t=-s$, ist
$$(A_{s,t}|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & s & 0 & 1 \\ t & 0 & t & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & t & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} t & 0 & t & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right);$$
wegen $\mathrm{Rang}(A_{s,t}) = 2 < 3 = \mathrm{Rang}(A_{s,t}\,|\,b)$ besitzt das lineare Gleichungssystem $A_{s,t} \cdot x = b$ keine Lösung; es ist also $L_{s,t} = \emptyset$.

46. Wir betrachten für das durch die drei Parameter r, s, $t \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 4 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & r\,x_3 & & & = & 1 \\ s\,x_1 & & & + & x_3 & + & t\,x_4 & = & 1 \end{array}$$
die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right);$$
ist nun das Gleichungssystem lösbar, so gibt die Anzahl der freien Variablen die Dimension der Lösungsmenge an.

a) Wegen
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-2)\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+(-s)\mathrm{I}}{\leadsto}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2\,s & 1 & t-2\,s & 1-4\,s \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right)$$
treffen wir die folgende Fallunterscheidung:
   - Fall 1: $s \neq 0$. Damit sind
     - im Falle $r \neq 0$ die Variablen x_1, x_2, x_3 gebunden sowie x_4 frei sowie
     - im Falle $r = 0$ die Variablen x_1, x_2, x_4 gebunden sowie x_3 frei;

     auf jeden Fall ist das Gleichungssystem lösbar und besitzt eine eindimensionale Lösungsmenge.
   - Fall 2: $s = 0$. Wegen
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{s.o.}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & r & -4 & -7 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+(-r)\mathrm{II}}{\leadsto}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4-r\,t & -7-r \end{array}\right)$$

sind auf jeden Fall x_1 und x_3 gebunden sowie x_2 frei, so daß das Gleichungssystem genau dann eine eindimensionale Lösungsmenge besitzt, wenn x_4 ebenfalls gebunden ist, also genau im Falle $-4 - r\,t \neq 0$ bzw. $r\,t \neq -4$.

b) Gemäß a) besitzt das Gleichungssystem für $s \neq 0$ oder $s = 0$ und $r\,t \neq -4$ eine eindimensionale Lösungsmenge; daher kommt eine zweidimensionale Lösungsmenge nur im Fall $s = 0$ und $r\,t = -4$ in Frage. Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & r & 0 & 1 \\ s & 0 & 1 & t & 1 \end{array}\right) \overset{\text{a)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7-r \end{array}\right)$$

ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $-7 - r = 0$ gilt; damit muß $r = -7$ und wegen $r\,t = -4$ auch $t = \frac{4}{7}$ gelten. Für diese Wahl der Parameter ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

47. a) Wir weisen die Linearität der Abbildung

$$\mathrm{Spur} : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

anhand der Definition nach:

- Für alle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) = \\ &= (a_{11} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + \ldots + b_{nn}) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B); \end{aligned}$$

folglich ist Spur zunächst additiv.

- Für alle
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
gilt
$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$
und damit
$$\mathrm{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot a_{11} + \ldots + \lambda \cdot a_{nn} = \lambda \cdot (a_{11} + \ldots + a_{nn}) = \lambda \cdot \mathrm{Spur}(A);$$
folglich ist Spur auch homogen.

b) Das k–te Diagonalelement der Matrix AB ist
$$a_{k1}b_{1k} + \ldots + a_{kn}b_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}$$
und damit
$$\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik};$$
entsprechend ist das l–te Diagonalelement der Matrix BA
$$b_{l1}a_{1l} + \ldots + b_{ln}a_{nl} = \sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl}$$
und damit
$$\mathrm{Spur}(BA) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl} \right) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{lj}a_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lj}.$$
Nach einer geeigneten Umindizierung ($j \leftrightarrow k$ und $i \leftrightarrow l$) erkennt man $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

c) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

- $ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit $\mathrm{Spur}(ABC) = 0$ sowie
- $BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\mathrm{Spur}(BAC) = 1$.

d) Aus $A\,B - B\,A = \lambda\,E_n$ ergibt sich
$$n \cdot \lambda = \mathrm{Spur}(\lambda\,E_n) = \mathrm{Spur}(A\,B - B\,A) \underset{\text{a)}}{=} \mathrm{Spur}(A\,B) - \mathrm{Spur}(B\,A) \underset{\text{b)}}{=} 0,$$
wegen $n \neq 0$ also $\lambda = 0$.

48. a) Unter Verwendung der Beziehung $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^\top)$ ergibt sich

$$\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ surjektiv} \iff \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Zeilenzahl}(A) = m \iff \\ \mathrm{Rang}(A^\top) = \mathrm{Spaltenzahl}(A^\top) = m \iff \ell_{A^\top} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ injektiv.}$$

b) Der Rang der gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Dimension des Spaltenraumes S, der von den n–Spalten $s_1, \ldots, s_n$ der Matrix A erzeugt wird; es ist also $S = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. Um die gewünschte Beziehung zu zeigen, müssen wir die lineare Unabhängigkeit der Spalten $s_1, \ldots, s_n$ der Matrix A nachweisen. Seien dazu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot s_1 + \ldots + \lambda_n \cdot s_n = 0;$$

diese Beziehung fassen wir nun als homogenes lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

auf, und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $A^\top \in \mathbb{R}^{n\times m}$ erhalten wir

$$A^\top \cdot (A \cdot x) = A^\top \cdot 0, \qquad \text{also} \qquad \left(A^\top A\right) \cdot x = 0,$$

woraus sich wegen $A^\top A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ schon $x = 0$ ergibt. Damit ergibt sich $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, und folglich sind die Spalten $s_1, \ldots, s_n$ der Matrix A linear unabhängig, weswegen

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim(S) = \dim\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = n$$

gilt.