# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Bearbeitungsvorschlag —

41. Es ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Rang einer Matrix ändert sich nicht unter elementaren Zeilenumformungen; bei einer Matrix in Zeilenstufenform stimmt er mit der Anzahl der von Nullzeile verschiedenen Zeilen, also mit der Anzahl der Pivots, überein. Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\overset{\mathrm{II}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist daher $\mathrm{Rang}(A) = 2$, und wegen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-5\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(B) = 2$. Des weiteren erhält man wegen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{8}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+7\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+4\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum einen $\mathrm{Rang}(A \cdot B) = 1$ und wegen

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-7\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum anderen $\mathrm{Rang}(B \cdot A) = 2$; es gilt hier also $\mathrm{Rang}(A \cdot B) \neq \mathrm{Rang}(B \cdot A)$.

42. Es gilt

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 9 & t \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 & t-8 \end{array}\right) \overset{\text{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 & t-8 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\text{II}}{\overset{\text{III}+2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & t-5 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-5 \end{array}\right).$$

a) Mit obiger Rechnung ergibt sich sofort

$$(A\,|\,0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist

$$\text{Rang}(A) = 3, \qquad \text{also} \qquad \dim(L_0) = 5 - \text{Rang}(A) = 5 - 3 = 2,$$

und mit der Wahl der freien Variablen $x_3 = 1$ und $x_5 = 0$ sowie $x_3 = 0$ und $x_5 = 1$ erhält man für $L_0$ die beiden Basisvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wegen

$$(A\,|\,b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-5 \end{array}\right)$$

erhält man

$$\text{Rang}(A) = 3 \qquad \text{und} \qquad \text{Rang}(A\,|\,b) = \begin{cases} 3, & \text{falls } t = 5, \\ 4, & \text{falls } t \neq 5; \end{cases}$$

damit ist das inhomogene Gleichungssystem $A \cdot x = b$

- für $t \neq 5$ wegen
$$\mathrm{Rang}(A) = 3 \neq 4 = \mathrm{Rang}(A \,|\, b)$$
unlösbar sowie
- für $t = 5$ wegen
$$\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A \,|\, b)$$
lösbar, wobei sich mit der Wahl der freien Variablen $x_3 = 0$ und $x_5 = 0$ die partikuläre Lösung
$$x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
ergibt.

c) Gemäß a) und b) gilt:

- Für $t \neq 5$ ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ unlösbar, also $L = \emptyset$.
- Für $t = 5$ ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar, und die Lösungsmenge ist
$$L = x_p + L_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

43. Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^m$ ist genau dann lösbar, wenn
$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|b)$$
gilt; in diesem Fall gilt für die Dimension $d$ des Lösungsraumes
$$d = n - \mathrm{Rang}(A).$$
Hier ist
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3+\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Wegen
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 & 3+\beta \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\leadsto}}$$
$$\leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2\,\alpha & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 - 3\,\alpha & \beta \end{array}\right)$$
treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $\alpha \neq 0$ ist
$$\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A|b);$$
damit ist das Gleichungssystem (unabhängig von $\beta$) lösbar, und es gilt $d = 4 - 3 = 1$.
- Im Fall $\alpha = 0$ ist
$$\mathrm{Rang}(A) = 2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Rang}(A|b) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \beta = 0, \\ 3, & \text{falls } \beta \neq 0; \end{cases}$$
damit ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\beta = 0$ ist, und es gilt $d = 4 - 2 = 2$.

b) Im Fall $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit sind $x_3$ und $x_4$ die freien Unbestimmten, und man erhält die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ \lambda - 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $\alpha = \beta = 1$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+2\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right);$$

damit ist $x_4$ die freie Unbestimmte, und man erhält die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 7\lambda \\ 3\lambda \\ 1 + 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

44. Wir treffen hinsichtlich $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $r = 0$ sind die Einträge der beiden Matrizen $A$ und $B$ alle Null, also auch die Einträge ihres Produktes $A \cdot B$ und es gilt $\text{Rang}(A \cdot B) = 0 = r$; damit ist in diesem Fall die gegebene Beziehung gültig.
- Im Fall $r = 1$ ist die Beziehung nicht gültig; wir wählen als Gegenbeispiel die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = r = 1$. Für das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich die Nullmatrix mit $\text{Rang}(A \cdot B) = 0 \neq 1 = r$.
- Im Fall $r = 2$ ist die Beziehung nicht gültig; wir wählen als Gegenbeispiel die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = r = 2$. Für das Produkt ergibt sich

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A \cdot B) = 1 \neq 2 = r$.
- Im Fall $r = 3$ besitzen die beiden Matrizen $A$ und $B$ vollen Rang und sind damit invertierbar; folglich ist auch ihr Produkt $A \cdot B$ invertierbar und besitzt damit ebenfalls den vollen Rang $r = 3$. Damit ist in diesem Fall die gegebene Beziehung gültig.