MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 10
23.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Bearbeitungsvorschlag —

37. a) Sei $U = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \subseteq V$ der von den drei (nicht notwendigerweise linear unabhängigen) Vektoren b_1, b_2, b_3 aufgespannte Unterraum des reellen Vektorraums V. Damit ist $U = \{0\}$ der Nullraum, oder es läßt sich nach dem Basisauswahlsatz aus dem Erzeugendensystem b_1, b_2, b_3 von U eine Basis von U auswählen; auf jeden Fall gilt aber

$$d := \dim(U) \leq 3.$$

Da nun höchstens d Vektoren aus U linear unabhängig sein können, sind die vier Vektoren

$$v_1 = b_1 + b_2 + b_3, \qquad v_2 = b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3,$$

$$v_3 = 2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3 \qquad \text{und} \qquad v_4 = 3\,b_1 + b_2 + 2\,b_3,$$

die als Linearkombinationen von b_1, b_2, b_3 in U liegen, sicher linear abhängig.

b) Sei $p : V \to \mathbb{R}^3$ die bijektive Abbildung, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von V zuordnet; damit ist

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $A = (p(v_1),\ p(v_2),\ p(v_3)) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (2+3+6) - (4+9+1) = -3 \neq 0;$$

damit sind die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ und folglich auch die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in V$ linear unabhängig.

Alternativ läßt sich die lineare Unabhängigkeit der Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in V$ auch gemäß der Definition, also ohne Rückgriff auf die Koordinatenvektoren $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_3) \in \mathbb{R}^3$ zeigen: seien dazu λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (b_1 + b_2 + b_3) + \lambda_2 \cdot (b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3) + \lambda_3 \cdot (2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3) = 0_V$$

und damit

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3) \cdot b_1 + (\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3) \cdot b_2 + (\lambda_1 + 3\,\lambda_2 + \lambda_3) \cdot b_3 = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von b_1, b_2, b_3 folgt daraus

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\,\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + 3\,\lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

damit $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ und $2\,\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, also $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$ und somit auch $\lambda_1 = 0$. Damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

38. a) Wir bestimmen zunächst die Lösungsräume

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\right\} \qquad \text{und} \qquad W = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid B \cdot x = 0\right\}$$

der linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = 0$ und $B \cdot x = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{II}}{\overset{\text{I}+2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sind x_3 und x_4 die beiden freien Variablen, und das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt genau die Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} 2\,\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von U; da u_1, u_2 zudem linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von U.

Wegen

$$(B|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

sind x_3 und x_4 die beiden freien Variablen, und das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = 0$ besitzt genau die Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 2\,\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$. Damit ist $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von W; da $w_1,\ w_2$ auch linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis von W. Damit liegt ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ genau dann im Durchschnitt $U \cap W$, wenn es $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2\,\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 2\,\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},$$

also

$$2\,\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1, \qquad \lambda_2 = 2\,\mu_1 - \mu_2, \qquad \lambda_1 = \mu_1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \mu_2,$$

gibt; dies ist aber zu $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2$ gleichwertig. Folglich ist

$$x = \lambda_1 \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

demnach gilt $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

b) Gemäß a) bilden $u_1,\ u_2$ eine Basis von U sowie $w_1,\ w_2$ eine Basis von W; damit gilt

$$\dim(U) = 2 \qquad \text{und} \qquad \dim(W) = 2.$$

Da $v,\ u_1$ (oder auch $v,\ u_2$) zwei Vektoren aus U sind, die offensichtlich linear unabhängig sind, bilden sie wegen $\dim(U) = 2$ schon eine Basis von U.

Entsprechend sind v, w_1 (oder auch v, w_2) zwei Vektoren aus W, die offensichtlich linear unabhängig sind; folglich bilden sie wegen $\dim(W) = 2$ ebenfalls schon eine Basis von W.

Des weiteren ist $v \neq 0$ eine Basis von $U \cap W$, woraus sich $\dim(U \cap W) = 1$ und mit der Dimensionsformel

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

ergibt; wegen

$$U + W = \langle v, u_1 \rangle + \langle v, w_1 \rangle = \langle v, u_1, w_1 \rangle$$

bilden die drei Vektoren v, u_1, w_1 ein Erzeugendensystem von $U + W$ und sind damit wegen $\dim(U + W) = 3$ schon eine Basis.

39. a) Die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$ zweier Untervektorräume W_1 und W_2 eines reellen Vektorraums V lautet

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

b) Für $V = \mathbb{R}^5$ und Untervektorräume W_1 und W_2 von V der Dimensionen $\dim W_1 = 3$ und $\dim W_2 = 3$ gilt wegen $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ zum einen

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 = 3$$

sowie wegen $W_1 + W_2 \subseteq \mathbb{R}^5$ zum anderen

$$\dim(W_1 + W_2) \leq \dim \mathbb{R}^5 = 5,$$

so daß sich unter Verwendung der Dimensionsformel dann

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \underbrace{\dim W_1}_{=3} + \underbrace{\dim W_2}_{=3} - \underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{\leq 5} \geq 3 + 3 - 5 = 1$$

ergibt. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\dim(W_1 \cap W_2) \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

und haben diese drei möglichen Werte noch zu belegen:

- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_3, e_4, e_5 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.
- Für $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und $W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist $W_1 \cap W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ und damit $\dim(W_1 \cap W_2) = 3$.

40. Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a + b - c = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist:

- Für die Nullmatrix
$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{gilt} \qquad 0 + 0 - 0 = 0,$$
also $O \in U$.
- Für alle A, $B \in U$ gilt
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{mit} \qquad a_1 + b_1 - c_1 = 0$$
und
$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{mit} \qquad a_2 + b_2 - c_2 = 0;$$
damit ist
$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
mit
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = \\ = (a_1 + b_1 - c_1) + (a_2 + b_2 - c_2) = 0 + 0 = 0,$$
also $A + B \in U$.
- Für alle $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{mit} \qquad a + b - c = 0;$$
damit ist
$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
mit
$$\lambda \cdot a + \lambda \cdot b - \lambda \cdot c = \lambda \cdot (a + b - c) = \lambda \cdot 0 = 0,$$
also $\lambda \cdot A \in U$.

Damit ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei U genau aus den Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a + b & d \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_2} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= B_3}$$
mit a, b, $d \in \mathbb{R}$ besteht; damit bilden B_1, B_2, B_3 ein Erzeugendensystem von U. Für alle λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 = 0$ gilt
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; damit sind B_1, B_2, B_3 auch linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U, und es gilt $\dim(U) = 3$.

Wir können nun B_1, B_2, B_3 mit jedem beliebigen $B_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus U$ zu einer Basis B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ergänzen, also etwa

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $W = \langle B_4 \rangle$ gemäß

$$U + W = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad U \cap W = \{O\}$$

ein zu $U = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ komplementärer Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.