MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 9
16.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Sei $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II},\ \text{IV}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{III},\ \text{IV}-2\text{III}}{\overset{\text{I}+2\text{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3\,\lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; damit sind

$$3\,\lambda \cdot v_1 + (-2\,\lambda) \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Darstellungen des Nullvektors 0 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4. Insbesondere sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Für $\lambda = 1$ ergibt sich $v_3 = -3\,v_1 + 2\,v_2$, und damit ist $V = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$. Mit $A' = (v_1, v_2, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist also $x = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A' \cdot x = 0$; damit sind v_1, v_2, v_4 linear unabhängig. Folglich bilden v_1, v_2, v_4 eine Basis von V.

c) Die Basis v_1, v_2, v_4 von V läßt sich genau dann mit dem Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen, wenn $b \notin \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ gilt. Wegen

$$(A'|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ -1 & -1 & 2 & b_3 \\ 2 & 3 & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 2 & b_3 + b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_4 - 2\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_4 + b_2 - 2\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2\,b_3 + 3\,b_2 - 4\,b_1 \end{array}\right)$$

gilt dabei $b \notin V$ genau dann, wenn $4\,b_1 + 2\,b_3 \neq 3\,b_2 + b_4$ ist.

34. Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V. Damit bilden die Vektoren

$$v_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3, \quad v_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4, \quad v_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3, \quad v_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$$

genau dann eine Basis von V, wenn ihre Koordinatenvektoren

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad p(v_3) = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden; dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(v_1),\ p(v_2),\ p(v_3),\ p(v_4)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ \beta_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\beta_2\text{II}}{\overset{\text{III}-\beta_1\text{I}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1-\beta_1\,\beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta_2\,\beta_4 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Diagonal–}}{=}} (1-\beta_1\,\beta_3)\,(1-\beta_2\,\beta_4)$$

sind also die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 genau dann eine Basis von V, wenn

$$(1-\beta_1\,\beta_3)\,(1-\beta_2\,\beta_4) \neq 0$$

gilt.

35. Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 3; für einen Vektor

$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{sei} \qquad p(v) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sein Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis X^3, X^2, X, 1. Damit ergibt sich für das Erzeugendensystem u_1, u_2, u_3 von U dann

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für das Erzeugendensystem w_1, w_2 von W dann

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $v \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt damit

$$\begin{aligned} v \in U \cap W \quad &\iff \quad v \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \text{ und } v \in \langle w_1, w_2 \rangle \\ &\iff \quad p(v) \in \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \text{ und } p(v) \in \langle p(w_1), p(w_2) \rangle \\ &\iff \quad \alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) = p(v) = \beta_1 p(w_1) + \beta_2 p(w_2) \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten α_1, α_2, α_3, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies führt über

$$\alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) + \beta_1(-p(w_1)) + \beta_2(-p(w_2)) = 0$$

auf das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$(p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

und damit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$v \in U \cap W \iff v = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \lambda \left(X^3 + 1\right) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot (X^3 + 1)$, also $X^3 + 1$ eine Basis von $U \cap W$.

36. Es sei $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ der von den vier Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

aufgespannte Unterraum in einem reellen Vektorraum V; dabei sind die Vektoren a, b, c, d als linear unabhängig vorausgesetzt. Wegen

$$v_1 = (a + b) + (c + d) = v_4 + v_3 \in \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$$

wird der Unterraum U bereits durch die drei Vektoren v_2, v_3, v_4 erzeugt; zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_2 + \lambda_2 \cdot v_3 + \lambda_3 \cdot v_4 = 0_V,$$

also

$$\lambda_1 \cdot (b + c) + \lambda_2 \cdot (c + d) + \lambda_3 \cdot (a + b) = 0_V$$

und damit

$$\lambda_3 \cdot a + (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot b + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot c + \lambda_2 \cdot d = 0_V.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von a, b, c, d folgt daraus

$$\lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$

insgesamt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; folglich sind v_2, v_3, v_4 auch linear unabhängig und somit eine Basis von U. Für die Dimension von U ergibt sich demnach $\dim(U) = 3$.