MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 8
09.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. a) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn die Matrix $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = (2\,t + 3 + 3) - (2 + 9 + t) = t - 5$$

ist dies genau für $t \neq 5$ der Fall.

b) Die Koordinaten des Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 sind genau die Koeffizienten der Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $A \cdot x = v$; da nun A invertierbar ist, gilt $x = A^{-1} \cdot v$ mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{t-5} \begin{pmatrix} 2\,t-9 & 3-t & 1 \\ 3-t & t-1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $t = 4$ ist also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, und man erhält:

- $e_1 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$; damit sind 1, 1, -1 die Koordinaten sowie v_1, v_2, $-v_3$ die Komponenten von e_1 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_2 = 1 \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$; damit sind 1, -3, 2 die Koordinaten sowie v_1, $-3\,v_2$, $2\,v_3$ die Komponenten von e_2 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_3 = (-1) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3$; damit sind -1, 2, -1 die Koordinaten sowie $-v_1$, $2\,v_2$, $-v_3$ die Komponenten von e_3 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.

Für $t = 6$ ist also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, und man erhält:

- $e_1 = 3 \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$; damit sind 3, -3, 1 die Koordinaten sowie $3\,v_1$, $-3\,v_2$, v_3 die Komponenten von e_1 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_2 = (-3) \cdot v_1 + 5 \cdot v_2 + (-2) \cdot v_3$; damit sind -3, 5, -2 die Koordinaten sowie $-3\,v_1$, $5\,v_2$, $-2\,v_3$ die Komponenten von e_2 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_3 = 1 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$; damit sind 1, -2, 1 die Koordinaten sowie v_1, $-2\,v_2$, v_3 die Komponenten von e_3 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.

c) Sei zunächst $t = 5$. Wegen

$$(A|u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & 2 & 3 & u_2 \\ 1 & 3 & 5 & u_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & u_2 - u_1 \\ 0 & 2 & 4 & u_3 - u_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2\,u_1 - u_2 \\ 0 & 1 & 2 & u_2 - u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - 2\,u_2 + u_1 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = u$ genau dann lösbar, der Vektor u also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn für seine Koeffizienten $u_1 - 2\,u_2 + u_3 = 0$ gilt. Folglich ist

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 - 2\,u_2 + u_3 = 0\}.$$

Speziell für $u = 0$ ergibt sich

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Folglich sind

$$\lambda \cdot v_1 + (-2\,\lambda) \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der v_1, v_2, v_3.

Sei nun $t = 6$; gemäß a) bilden also v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Demnach gilt:

- v_1, v_2, v_3 sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.
- v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig; damit ist der Nullvektor nur als triviale Linearkombination $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$ darstellbar.

30. a) Sei $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{III}}{\overset{\text{II}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} -3\,\mu \\ -2\,\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Etwa für $\mu = -1$ ergibt sich $3 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + (-1) \cdot v_4 = 0$. Damit sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Sei $A_1 = (v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Wegen

$$(A_1|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\leadsto}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}\cdot\text{III}}{\overset{(-1)\cdot\text{II}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\text{III}}{\overset{\text{I}-5\text{III},\ \text{II}-\text{III}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt das lineare Gleichungssystem $A_1 \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$; damit sind die Vektoren v_2, v_3, v_4 linear unabhängig.

Sei $A_2 = (v_1, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Wegen

$$(A_2|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\leadsto}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{(-1)\cdot\text{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{III}}{\overset{\text{I}-5\text{III},\ \text{II}-\text{III}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt das lineare Gleichungssystem $A_2 \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$; damit sind die Vektoren v_1, v_3, v_4 linear unabhängig.

Sei $A_3 = (v_1, v_2, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Wegen

$$(A_3|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\leadsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{III}}{\overset{\text{I}-3\text{III},\ \text{II}-3\text{III}}{\leadsto}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt das lineare Gleichungssystem $A_3 \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$; damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_4 linear unabhängig.

Sei $A_4 = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Wegen

$$(A_4|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{III}}{\overset{\text{II}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt das lineare Gleichungssystem $A_4 \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$; damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

c) Mit a) erhält man

- $v_1 = (-\frac{2}{3}) \cdot v_2 + (-\frac{1}{3}) \cdot v_3 + \frac{1}{3} \cdot v_4$,
- $v_2 = (-\frac{3}{2}) \cdot v_1 + (-\frac{1}{2}) \cdot v_3 + \frac{1}{2} \cdot v_4$,
- $v_3 = (-3) \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 1 \cdot v_4$ und
- $v_4 = 3 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

31. a) Für $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{II}}{\overset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+2\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}+2\text{III}}{\overset{\text{I}-5\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist $x = \begin{pmatrix} 4\,\mu \\ -3\,\mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; etwa für $\mu = 1$ ergibt sich die nichttriviale Linearkombination

$$4 \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = 0$$

des Nullvektors aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4. Insbesondere sind damit die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Nach a) ist $v_3 = 4 \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + 1 \cdot v_4$, insbesondere also $V = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$. Für $A' = (v_1, v_2, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $x = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A' \cdot x = 0$; damit sind die Vektoren v_1, v_2, v_4 linear unabhängig und eine Basis von V.

c) Für $B = (v_1, v_2, v_4, b) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 4 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & 1 & 0 & b_4 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 3 & -b_1 + b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 + b_4 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -b_1 + b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \\ 1 & -1 & -b_1 + b_4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\text{II}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -b_1 + b_2 - 2\,b_3 \\ 1 & 1 & b_3 \\ 0 & -2 & -b_1 - b_3 + b_4 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{=}$$

$$= (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -b_1 + b_2 - 2\,b_3 \\ -2 & -b_1 - b_3 + b_4 \end{vmatrix} =$$

$$= -((-b_1 - b_3 + b_4) - (-2)(-b_1 + b_2 - 2\,b_3)) = 3\,b_1 - 2\,b_2 + 5\,b_3 - b_4$$

Damit ist v_1, v_2, v_4, b genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^4$, wenn

$$3\,b_1 - 2\,b_2 + 5\,b_3 - b_4 \neq 0$$

gilt; insbesondere lassen sich v_1, v_2, v_4 mit einem beliebigen Einheitsvektor zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen.

32. a) Wir weisen anhand der Definition nach, daß die Polynome 1, X, X^2, X^3 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ bilden:

- Jedes Polynom $f \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ besitzt die Gestalt

$$f = a_3\,X^3 + a_2\,X^2 + a_1\,X + a_0$$

  mit Koeffizienten a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ und ist damit eine Linearkombination der gegebenen Polynome 1, X, X^2, X^3; folglich sind 1, X, X^2, X^3 ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.
- Seien λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot X + \lambda_3 \cdot X^2 + \lambda_4 \cdot X^3 = 0;$$

  damit ist aber

$$\lambda_4\,X^3 + \lambda_3\,X^2 + \lambda_2\,X + \lambda_1 = 0$$

  das Nullpolynom, und der Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. Folglich sind 1, X, X^2, X^3 linear unabhängig.

Entsprechend zeigt man, daß die Polynome 1, X, $X^2, \ldots, X^{n-1}$, X^n eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ bilden.

b) Seien $b_1 = 1$, $b_2 = X + 1$, $b_3 = X^2 + X + 1$ und $b_4 = X^3 + X^2 + X + 1$ sowie $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \subseteq \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

- Wegen

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \in \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle, \\ X &= b_2 - b_1 \in \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle, \\ X^2 &= b_3 - b_2 \in \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \quad \text{und} \\ X^3 &= b_4 - b_3 \in \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \end{aligned}$$

  gilt

$$\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = \langle 1, X, X^2, X^3 \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle,$$

  und damit bilden b_1, b_2, b_3, b_4 ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.
- Seien λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \lambda_3 \cdot b_3 + \lambda_4 \cdot b_4 = 0$$

  und folglich

$$\lambda_4 \, X^3 + (\lambda_3 + \lambda_4) \, X^2 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \, X + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0;$$

  der Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, also auch $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. Damit sind b_1, b_2, b_3, b_4 linear unabhängig.

Insgesamt bilden also auch b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.