MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 7
02.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumskriteriums, daß U und W Unterräume des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind:

- Wegen $0 \in U$ ist $U \neq \emptyset$. Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $x_3 = x_1 + x_2$ und $y_3 = y_1 + y_2$; damit erhält man $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ mit

$$x_3 + y_3 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),$$

also $x + y \in U$, sowie $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ mit

$$\lambda\, x_3 = \lambda\,(x_1 + x_2) = \lambda\, x_1 + \lambda\, x_2,$$

also $\lambda \cdot x \in U$. Damit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

- Wegen $0 \in W$ ist $W \neq \emptyset$. Für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$; damit erhält man $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, also $x + y \in W$, sowie $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda\, x_1 = \lambda x_2$, also $\lambda \cdot x \in W$. Damit ist W ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Gemäß der Definition der Unterräume U und W gilt

$$U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 = u_1 + u_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = w_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid w_1, w_3 \in \mathbb{R} \right\};$$

damit ergibt sich nach der Definition von $U + W$ dann

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_1 \\ u_1 + u_2 + w_3 \end{pmatrix} \mid u_1, u_2, w_1, w_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für e_1 können wir etwa $u_1 = 1$, $u_2 = w_1 = 0$ und $w_3 = -1$ wählen und erhalten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U + W,$$

für e_2 können wir etwa $u_2 = 1$, $u_1 = w_1 = 0$ und $w_3 = -1$ wählen und erhalten

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U + W,$$

und für e_3 können wir etwa $u_1 = u_2 = w_1 = 0$ und $w_3 = 1$ wählen und erhalten

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U + W.$$

Wegen $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist damit insbesondere $U + W = \mathbb{R}^3$ gezeigt.

c) Ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Unterraum $U \cap W$, wenn sowohl $x_3 = x_1 + x_2$ als auch $x_1 = x_2$ erfüllt ist, er also Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = 0 \end{array}$$

ist. Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ergibt sich demnach

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

anstelle von v kann auch jedes vom Nullvektor 0 verschiedene lineare Vielfache von v gewählt werden.

26. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$(A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 3 & 3 & b_2 \\ 3 & 0 & 1 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I, IV}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & -6 & -8 & b_3 - 3\,b_1 \\ 0 & -7 & -11 & b_4 - 4\,b_1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}-7\text{II}}{\overset{\text{III}-6\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 10 & b_3 + 9\,b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & 0 & 10 & b_4 + 10\,b_1 - 7\,b_2 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -1 & -3 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 10 & b_3 + 9\,b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 + b_1 - b_2 - b_3 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ genau dann lösbar, der Vektor v also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$ gilt. Damit ist

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 0 - 1 - 2 + 4 = 1 \neq 0$$

keine Linearkombination der v_1, v_2, v_3, während

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

eine Linearkombination der v_1, v_2, v_3 darstellt. Zur Ermittlung der Koeffizienten betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = w$: wegen

$$(A|w) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die einzige Lösung von $A \cdot x = w$; damit erhält man die (eindeutig bestimmte) Linearkombination

$$w = \frac{1}{5}\,v_1 - \frac{1}{5}\,v_2 + \frac{2}{5}\,v_3.$$

27. Zum einen ist

$$
\begin{aligned}
v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle, \\
v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle, \\
v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} &= (-1) \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle,
\end{aligned}
$$

also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \langle w_1, w_2 \rangle$, und zum anderen

$$
\begin{aligned}
w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} &= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \\
w_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,
\end{aligned}
$$

also $\langle w_1, w_2 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Insgesamt erhält man also $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$.

Alternativ kann man auch die Vektoren in $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und $\langle w_1, w_2 \rangle$ explizit bestimmen:

Für $A_1 = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$
\begin{aligned}
(A_1 \mid b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 4 & -1 & 5 & b_3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 6 & 4 & 2 & b_1 \\ 4 & -1 & 5 & b_3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-6\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & -8 & 8 & b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & -9 & 9 & b_3 - 4\,b_2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\frac{9}{8}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_2 \\ 0 & -8 & 8 & b_1 - 6\,b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 \end{array}\right);
\end{aligned}
$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $A_1 \cdot x = b$ genau dann lösbar, der Vektor b also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn

$$
b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0
$$

gilt, weswegen sich

$$
\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\}
$$

ergibt. Ferner ist für $A_2 = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$(A_2 \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 8 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ -5 & 9 & b_3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ -2 & 8 & b_1 \\ -5 & 9 & b_3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+5\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 8 & b_1 + 2\,b_2 \\ 0 & 9 & b_3 + 5\,b_2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\frac{9}{8}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 8 & b_1 + 2\,b_2 \\ 0 & 0 & b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 \end{array}\right);$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $A_2 \cdot x = b$ genau dann lösbar, der Vektor b also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn

$$b_3 + \frac{11}{4}\,b_2 - \frac{9}{8}\,b_1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0$$

gilt, weswegen sich

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\}$$

ergibt. Insgesamt erhält man also

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 \mid 9\,b_1 - 22\,b_2 - 8\,b_3 = 0 \right\} = \langle w_1, w_2 \rangle.$$

28. Es ist $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der kleinste Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, der die vier Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

enthält; dabei ist ein Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ genau dann in U, also Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4, wenn das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit der Koeffizientenmatrix $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ lösbar ist. Wegen

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & b_3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & b_4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & b_4 \end{array}\right)$$
$$\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & b_4 - b_2 \end{array}\right)$$
$$\underset{\mathrm{IV}-3\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - 3(b_3 - b_1) \end{array}\right)$$

ist also

$$U = \left\{ b \in \mathbb{R}^4 \mid 3\,b_1 - b_2 - 3\,b_3 + b_4 = 0 \right\};$$

damit gilt:

a) Wegen $3 \cdot 1 - 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 3 \notin 0$ ist etwa $e_1 \neq U$; damit gilt $U \subsetneq \mathbb{R}^4$.

b) Der Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ besteht genau aus denjenigen Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, deren Koeffizienten der linearen Gleichung $3\,b_1 - b_2 - 3\,b_3 + b_4 = 0$ genügen.