MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 1 + t^2 \geq 1$, insbesondere also $\det(A) \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) & -\det(A'_{41}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) & +\det(A'_{42}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) & -\det(A'_{43}) \\ -\det(A'_{14}) & +\det(A'_{24}) & -\det(A'_{34}) & +\det(A'_{44}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ -t^2 & -t & 1+t^2 & 0 \\ t^3 & t^2 & -t\,(1+t^2) & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$x_1 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 1+t^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1-t^2 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t & 0 \\ 1+t^2 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & t \\ 1+t^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot (-t\,(1+t^2)) = -t,$$

$$x_2 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t^2 & t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} \frac{1}{1+t^2} \cdot (1 \cdot (1+t^2) \cdot 1 \cdot 1) = 1,$$

$$x_3 = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{4. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$\frac{1}{1+t^2} \cdot (-1) \cdot (1+t^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & t \end{vmatrix} = -t,$$

$$\begin{aligned}
x_4 \quad &= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 1+t^2 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1-t^2 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{=} \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -t & 1 & 1+t^2 \\ 0 & t & 0 \end{vmatrix} \right] \\
&\underset{\text{3. Zeile}}{=} \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} - t \cdot (-1)\, t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1+t^2 \end{vmatrix} \right] \\
&= \quad \frac{1}{1+t^2} \cdot \left[(1-t^2)\,(1+t^2) + t^2\,(1+t^2) \right] = (1-t^2) + t^2 = 1.
\end{aligned}$$

22. Wir halten zunächst fest, daß eine Matrix $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Koeffizienten b_{ij} ganze Zahlen sind, wegen

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}$$

auch eine ganzzahlige Determinante $\det(B)$ besitzt.

Für „a) $\Longrightarrow$ b)" sei A invertierbar, und alle Koeffizienten von A^{-1} seien ganze Zahlen; damit sind nach obiger Bemerkung die Determinanten

$$\det(A) \qquad \text{und} \qquad \det(A^{-1})$$

ganze Zahlen. Aus $A \cdot A^{-1} = E_n$ folgt mit dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E_n) = 1,$$

woraus dann $\det(A) = \pm 1$ folgt.

Für „b) $\Longrightarrow$ a)" sei $\det(A) = \pm 1$; wegen $\det(A) \neq 0$ ist damit A invertierbar. Da die Koeffizienten von A ganze Zahlen sind, so sind auch die Koeffizienten aller Streichungsmatrizen A'_{ji} ganze Zahlen und nach obiger Bemerkung auch deren Determinanten $\det(A'_{ji})$. Damit sind aber die Koeffizienten

$$\widetilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ji})$$

für alle $i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ der komplementären Matrix $\widetilde{A}$ von A ganze Zahlen, woraus aufgrund von

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \pm \widetilde{A}$$

folgt, daß alle Koeffizienten von A^{-1} wieder ganze Zahlen sind.

23. a) Es ist

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot ((u - v) + v) = \lambda \cdot (u - v) + \lambda \cdot v,$$

also $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$, sowie

$$\lambda \cdot v = ((\lambda - \mu) + \mu) \cdot v = (\lambda - \mu) \cdot v + \mu \cdot v,$$

also $(\lambda - \mu) \cdot v = \lambda \cdot v - \mu \cdot v$.

b) Es ist

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V,$$

nach Subtraktion von $\lambda \cdot 0_V$ auf beiden Seiten also $0_V = \lambda \cdot 0_V$, sowie

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v,$$

nach Subtraktion von $0 \cdot v$ auf beiden Seiten also $0_V = 0 \cdot v$.

c) Es ist

$$(-\lambda) \cdot v = (0 - \lambda) \cdot v = 0 \cdot v - \lambda \cdot v = 0_V - \lambda \cdot v = -\lambda \cdot v$$

und

$$\lambda \cdot (-v) = \lambda \cdot (0_V - v) = \lambda \cdot 0_V - \lambda \cdot v = 0_V - \lambda \cdot v = -\lambda \cdot v.$$

d) Gemäß b) ist nur noch „$\Longrightarrow$" zu zeigen. Ist $\lambda = 0$, so ist man fertig; ist $\lambda \neq 0$, so gilt

$$0_V = \lambda^{-1} \cdot 0_V = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v.$$

24. a) Wegen $0 \in U_1$ ist $U_1 \neq \emptyset$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \\ &\qquad = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

also $x + y \in U_1$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda\, x_1 + \lambda\, x_2 + \lambda\, x_3 = \lambda\,(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also $\lambda \cdot x \in U_1$. Folglich ist nach dem Unterraumkriterium U_1 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2$ und $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, aber $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin U_2$. Damit ist U_2 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

c) Wegen $0 \in U_3$ ist $U_3 \neq \emptyset$. Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in U_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$; damit gilt $x_1 + 2\,x_2 = 3\,x_3$ und $y_1 + 2\,y_2 = 3\,y_3$. Für $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\begin{aligned} &(x_1 + y_1) + 2\,(x_2 + y_2) = x_1 + y_1 + 2\,x_2 + 2\,y_2 = \\ &\qquad = (x_1 + 2\,x_2) + (y_1 + 2\,y_2) = 3\,x_3 + 3\,y_3 = 3\,(x_3 + y_3), \end{aligned}$$

also $x + y \in U_3$, sowie für $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \lambda\, x_2 \\ \lambda\, x_3 \end{pmatrix}$

$$\lambda\, x_1 + 2\,(\lambda\, x_2) = \lambda\, x_1 + 2\,\lambda\, x_2 = \lambda\,(x_1 + 2\,x_2) = \lambda\,(3\,x_3) = 3\,(\lambda\, x_3),$$

also $\lambda \cdot x \in U_3$. Folglich ist nach dem Unterraumkriterium ist U_3 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

d) Es ist $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_4$ und $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_4$, aber $x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_4$. Damit ist U_4 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.