MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I" — Bearbeitungsvorschlag —

17. Für alle s, $t \in \mathbb{R}$ ist zum einen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} s & 0 & t & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -t & 0 & s & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{\text{zweite}}{\underset{\text{Spalte}}{=}} \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot 8}_{=8} \cdot \begin{vmatrix} s & t & 0 \\ -t & s & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{\text{dritte}}{\underset{\text{Spalte}}{=}}$$

$$= 8 \cdot \underbrace{(-1)^{3+3} \cdot 9}_{=9} \cdot \begin{vmatrix} s & t \\ -t & s \end{vmatrix} = 72 \cdot (s \cdot s + t \cdot (-t)) = 72 \left(s^2 + t^2\right)$$

und zum anderen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2t \\ 2t & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 1 & 0 & -t \end{vmatrix} \overset{\text{IV+I}}{\underset{\text{II}-\text{III}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2t \\ t & 0 & 0 & s \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 0 & 0 & t \end{vmatrix} \overset{\text{zweite}}{\underset{\text{Spalte}}{=}}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot (-1)}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & s \\ t & 1 & -s \\ s & 0 & t \end{vmatrix} \overset{\text{zweite}}{\underset{\text{Spalte}}{=}} \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} t & s \\ s & t \end{vmatrix} = t^2 - s^2;$$

damit gilt zum einen

$$A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0 \iff$$
$$\iff 72\left(s^2 + t^2\right) \neq 0 \iff (s \neq 0 \text{ oder } t \neq 0)$$

und zum anderen

$$B \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \text{ invertierbar} \iff \det(B) \neq 0 \iff$$
$$\iff t^2 - s^2 \neq 0 \iff t^2 \neq s^2 \iff t \neq \pm s.$$

18. a) Es ist

- $A_1 = (-1)$, also $\det(A_1) = -1$,
- $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 1 - 1 = 0$, sowie

- $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, also $\det(A_3) = (-1+0+0) - (0-1-1) = 1$.

b) Für $n \geq 4$ erhalten wir mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & \end{vmatrix} \overset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} =$$

$$= -\det(A_{n-1}) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \overset{\text{1. Spalte}}{=} -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}).$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $\det(A_n) = -\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$ und analog $\det(A_{n-1}) = -\det(A_{n-2}) - \det(A_{n-3})$, woraus $\det(A_n) = \det(A_{n-3})$ folgt. Damit ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

- $\det(A_{3k+1}) = \det(A_1) = -1$,
- $\det(A_{3k+2}) = \det(A_2) = 0$ sowie
- $\det(A_{3k+3}) = \det(A_3) = 1$.

19. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+1 & 2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot \big((t+1)(t-2) - 2 \cdot (-1)\big) = (t-2) \cdot \big((t^2 - t - 2) + 2\big) =$$

$$= (t-2) \cdot \big(t^2 - t\big) = (t-2)\, t\, (t-1);$$

damit ist A genau dann invertierbar, wenn $t \notin \{0, 1, 2\}$ gilt.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (t-2)^2 & 0 & -2\,(t-2) \\ 1 & t\,(t-1) & t+1 \\ t-2 & 0 & (t+1)\,(t-2) \end{pmatrix},$$

und für $t \notin \{0,1,2\}$ erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{t-2}{t\,(t-1)} & 0 & -\frac{2}{t\,(t-1)} \\ \frac{1}{(t-2)\,t\,(t-1)} & \frac{1}{t-2} & \frac{t+1}{(t-2)\,t\,(t-1)} \\ \frac{1}{t\,(t-1)} & 0 & \frac{t+1}{t\,(t-1)} \end{pmatrix}.$$

20. a) Es ist

$$(M|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\underset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = (E_3|M')$$

Damit ist M invertierbar mit $M^{-1} = M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Zu den im $\mathbb{R}^3$ gegebenen Spaltenvektoren betrachten wir die beiden Matrizen

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{a)}}{=} M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ N = (w_1, w_2, w_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned}$$

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nun:

$$\begin{aligned} &A \cdot v_1 = w_1,\ A \cdot v_2 = w_2,\ A \cdot v_3 = w_3 \iff \\ &\iff A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3) = (w_1, w_2, w_3) \iff \\ &\iff A \cdot M = N \iff A = N \cdot M^{-1}, \end{aligned}$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$