MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Man erhält mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 2 \end{vmatrix} = $$
$$= (3 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) \cdot (-6)) -$$
$$- (4 \cdot 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-3) \cdot 2) =$$
$$= (6 - 14 + 72) - (28 - 18 + 12) = 64 - 22 = 42$$

sowie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{=}}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{=}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} -1 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-16) = -48$$

und

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{=}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

b) Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes sowie der Rechenregeln für die Determinante ergibt sich ferner

- $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot 42 = 336$,
- $\det(A^2) = \det(A)^2 = 42^2 = 1764$ und
- $\det(BC) = \det(B) \cdot \det(C) = (-48) \cdot (-1) = 48$.

14. a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{IV-I,\ V-I}}{\overset{\mathrm{III-I}}{=}} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{IV-2II,\ V-2II}}{\overset{\mathrm{III-2II}}{=}} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{V}}{=} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{V-4III}}{\overset{\mathrm{IV-III}}{=}} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 \end{vmatrix} \underset{\text{4 aus IV}}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 15 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{V-IV}}{=} \\
&= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 4 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 14}_{\text{Diagonalelemente}} = 56.
\end{aligned}
$$

b) Wegen der Linearität der Determinante in jeder der fünf Zeilen gilt

$$\det(C) = \det\left((-\tfrac{1}{2}) \cdot B\right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \det(B) = -\tfrac{1}{32} \cdot 56 = -\tfrac{7}{4} < -1.$$

c) Wegen $\det(C) < 0$ gemäß b) kann es keine Matrix $F \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $F^2 = C$ geben, denn ansonsten ergäbe sich über den Determinantenmultiplikationssatz in

$$-\tfrac{7}{4} = \det(C) = \det(F^2) = (\det(F))^2 \geq 0$$

ein Widerspruch.

15. a) Mit der Regel von Sarrus gilt

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & a & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & a \\ a & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= (2\sqrt{2} + a^3 - 2\sqrt{2}) - (-2\,a - 2\,a - 2\,a) = a^3 + 6\,a = a\,(a^2+6).$$

Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, was wegen $a^2 + 6 \neq 0$ zu $a \neq 0$ gleichwertig ist.

b) Wieder mit der Regel von Sarrus gilt

$$\det(S) = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & a & -a \\ -a & \sqrt{2} & a \\ a & -a & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= (2\sqrt{2} + a^3 - a^3) - (-\sqrt{2}\,a^2 - \sqrt{2}\,a^2 - \sqrt{2}\,a^2) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,a^2.$$

Wegen $\det(S) = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,a^2 \geq 2\sqrt{2}$ gilt insbesondere $\det(S) \neq 0$; damit ist S invertierbar. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz gilt

$$\det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(S) =$$
$$= \frac{1}{\det(S)} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(A) = a\,(a^2+6).$$

16. a) Für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta & \frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \beta+\alpha & \frac{\beta^2}{2} + \alpha\beta + \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \beta+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta & \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta}.$$

b) Gemäß a) gilt
$$A_\alpha \cdot A_{-\alpha} = A_{\alpha+(-\alpha)} = A_0 = E_3;$$
damit ist A_α invertierbar mit $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$.

c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{(3\alpha)^2}{2} \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & \frac{(2\alpha)^2}{2} \\ 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha & \frac{9\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 3 & 6\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3\alpha & \frac{3\alpha^2}{2} \\ 0 & 3 & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt wegen a)

$$A_{2\alpha} = A_{\alpha+\alpha} = A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha^2$$

und

$$A_{3\alpha} = A_{2\alpha+\alpha} = A_{2\alpha} \cdot A_\alpha = A_\alpha^2 \cdot A_\alpha = A_\alpha^3,$$

woraus sich mit c)

$$A_\alpha^3 - 3A_\alpha^2 + 3A_\alpha = E, \qquad \text{also} \qquad A_\alpha^3 - 3A_\alpha^2 + 3A_\alpha - E = 0$$

ergibt; wir können also $a_0 = -1$, $a_1 = 3$, $a_2 = -3$ und $a_3 = 1$ wählen.
(Bemerkung: Durch die Wahl $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ wird zwar offensichtlich die gewünschte Beziehung

$$a_3\, A_\alpha^3 + a_2\, A_\alpha^2 + a_1\, A_\alpha + a_0\, E = 0$$

erreicht, die Bestimmung erfolgt aber ohne die geforderte Hilfe der Teilaufgaben a) und c).)