MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 3
04.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\delta = a\,d - b\,c \neq 0$ ist; in diesem Fall gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   a) • Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1\cdot 5 - 2\cdot 2 = 1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   • Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1\cdot 4 - 2\cdot 2 = 0$; damit ist A nicht invertierbar.

   • Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -1 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   • Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\delta = 1\cdot 2 - 2\cdot 2 = -2 \neq 0$; damit ist A invertierbar, und es gilt $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   b) • Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -t & s \end{pmatrix}$ ist $\delta = s\cdot s - t\cdot(-t) = s^2 + t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 + t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq 0$ oder $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2+t^2}\begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$.

   • Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$ ist $\delta = s\cdot s - t\cdot t = s^2 - t^2$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $s^2 - t^2 \neq 0$, also wenn $s \neq t$ und $s \neq -t$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{s^2-t^2}\begin{pmatrix} s & -t \\ -t & s \end{pmatrix}$.

   • Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ -s & t \end{pmatrix}$ ist $\delta = s\cdot t - t\cdot(-s) = 2\,s\,t$; damit ist A genau dann invertierbar, wenn $2\,s\,t \neq 0$, also wenn $s \neq 0$ und $t \neq 0$ gilt. In diesem Falle gilt dann $A^{-1} = \frac{1}{2\,s\,t}\begin{pmatrix} t & -t \\ s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\,s} & -\frac{1}{2\,s} \\ \frac{1}{2\,t} & \frac{1}{2\,t} \end{pmatrix}$.

- Für $A = \begin{pmatrix} s & t \\ s & t \end{pmatrix}$ ist $\delta = s \cdot t - t \cdot s = 0$; damit ist A für keine Wahl von s und t invertierbar.

10. Es ist

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+(-1)\text{II}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}+(-1)\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (E_3|A')$$

Damit ist A invertierbar mit $A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Es ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+(-7)\text{I}}{\overset{\text{II}+(-4)\text{I}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+(-2)\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

Da die dritte Zeile von B_1 Null ist, kann die Matrix B_1 nicht invertierbar sein; damit ist auch die zu B_1 zeilenäquivalente Matrix B nicht invertierbar.

Es ist

$$(C|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+(-1)\text{I}}{\overset{\text{III}+(-1)\text{I}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+(-1)\text{II}}{\overset{\text{III}+(-1)\text{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}\cdot(-1)}{\overset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{IV}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (E_4|C')$$

Damit ist C invertierbar mit $C^{-1} = C' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II}-\alpha\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 1+4\alpha & -2\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\underset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad = \quad (E_3 \mid M'_\alpha)\,;
\end{aligned}$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -1-4\alpha & 2\alpha \\ -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

12. a) Es ist

$$(A_s|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ s^2 & 1 & s & 0 & 1 & 0 \\ s & s^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-s^2\cdot\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-s\cdot\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s-s^4 & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist für $s = 1$ die Matrix A_s zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und folglich nicht invertierbar. Für $s \neq 1$ ist $1 - s^3 \neq 0$, und man erhält

$$(A_s|E_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s^3 & s\,(1-s^3) & -s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s^3 & -s & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}\cdot\frac{1}{1-s^3}}{\overset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{1-s^3}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & s^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-s\cdot\mathrm{II}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & s & -\frac{s^2}{1-s^3} & \frac{1}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-s\cdot\mathrm{III}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1-s^3} & -\frac{s}{1-s^3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{s}{1-s^3} & 0 & \frac{1}{1-s^3} \end{array}\right) = (E_3|B_s)$$

Damit ist A_s invertierbar mit

$$A_s^{-1} = B_s = \frac{1}{1-s^3}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für $s \neq 1$ ist A_s nach a) invertierbar; damit besitzt das lineare Gleichungssystem $A_s \cdot x = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = A_s^{-1} \cdot b = \frac{1}{1-s^3}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-s^3}\begin{pmatrix} 1-s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix} = \frac{1-s}{1-s^3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s+s^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$L_s = \left\{ \frac{1}{1+s+s^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_s|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.
Für $s = 1$ gilt

$$(A_1|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\lambda-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_1|b)$ gegebenen linearen Gleichungssystems.