MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 1
21.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. Für die gegebenen linearen Gleichungssysteme betrachte man die zugehörigen erweiterten Koeffizientenmatrizen. Es gilt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 2 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-5\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-7\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\cdot(-\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -12 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $x_3 = 0$, damit $3\,x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = \frac{1}{3}$, und damit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, also $x_1 = \frac{2}{3}$; folglich ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des linken Gleichungssystems.

Es ist natürlich auch möglich, das lineare Gleichungssystem über

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

sogar in die reduzierte Zeilenstufenform zu bringen und von dieser dann die Lösungsmenge direkt abzulesen.

Des weiteren ist

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -3 \\ 5 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-5\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -3 \\ 0 & -8 & -8 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+7\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & -8 & -8 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+8\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 19 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist das rechte Gleichungssystem nicht lösbar; es ist $L = \emptyset$.

2. Es ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 24 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 30 \\ 4 & 3 & -6 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 30 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{(-\frac{1}{5})\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-\mu \\ -6+2\lambda+2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des linken Gleichungssystems. Ferner ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-7\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -8 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -8 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Damit gilt

- $5\,x_4 = 4$, also $x_4 = \frac{4}{5}$,
- $x_3 + 3\,x_4 = 3$, also $x_3 = 3 - 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$,
- $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, und
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, also $x_1 = 2 - \frac{4}{5} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Damit ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des rechten Gleichungssystems.

3. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & s\,x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & s\,x_3 & - & 2s\,x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & 2\,(s-1)\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_s|b)$. Es ist

$$\begin{aligned}
(A_s|b) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & s & -2\,s & -1 \\ 1 & 0 & 2\,(s-1) & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\,s-1 & -2 \\ 1 & 0 & 2\,(s-1) & 3 & 2 \end{array}\right) \\
&\overset{\text{IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2\,s-1 & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2\,s & -2 \\ 0 & 1 & s-2 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\text{IV}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2\,s & -2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{-\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{IV}-s\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 & 1-s \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Dies legt die Fallunterscheidung $1-s^2=0$, also $s=1$ oder $s=-1$, und $1-s^2\neq 0$, also $s\notin\{-1,1\}$ nahe:

Für $s=1$ gilt

$$(A_1|b)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&1\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right);$$

mit $x_4=\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $x_3+x_4=1$, also $x_3=1-x_4=1-\lambda$,
- $x_2-2\,x_3+x_4=0$, also $x_2=2\,x_3-x_4=2\,(1-\lambda)-\lambda=2-3\,\lambda$, und
- $x_1-x_2+x_3+x_4=1$, also $x_1=1+x_2-x_3-x_4=1+(2-3\,\lambda)-(1-\lambda)-\lambda=2-3\,\lambda$;

damit ist $L_1=\left\{\begin{pmatrix}2-3\lambda\\2-3\lambda\\1-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ die Lösungsmenge für $s=1$.

Für $s=-1$ gilt

$$(A_{-1}|b)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&1\\0&1&-2&1&0\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&2\end{array}\right);$$

damit ist das Gleichungssystem für $s=-1$ nicht lösbar; es ist $L_{-1}=\emptyset$.

Für $s\notin\{-1,1\}$ ist $1-s^2\neq 0$, und wir erhalten

- $(1-s^2)\,x_4=1-s$, also $x_4=\frac{1-s}{1-s^2}=\frac{1}{1+s}$,
- $x_3+s\,x_4=1$, also $x_3=1-s\,x_4=1-s\cdot\frac{1}{1+s}=\frac{1}{1+s}$,
- $x_2-2\,x_3+x_4=0$, also $x_2=2\,x_3-x_4=2\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{1+s}=\frac{1}{1+s}$, und
- $x_1-x_2+s\,x_3+x_4=1$, also $x_1=1+x_2-s\,x_3-x_4=1+\frac{1}{1+s}-s\cdot\frac{1}{1+s}-\frac{1}{1+s}=\frac{1}{1+s}$;

damit ist $L_s=\left\{\frac{1}{1+s}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ die Lösungsmenge für $s\notin\{-1,1\}$.

4. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}x_1&+&&&2\,x_3&-&x_4&=&-2\\2\,x_1&+&x_2&+&7\,x_3&&&=&-3\\-3\,x_1&+&2\,x_2&+&&&\alpha\,x_4&=&8\\x_1&+&2\,x_2&+&8\,x_3&+&3\,x_4&=&\beta\end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$(A_\alpha|b_\beta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & \alpha & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & \alpha & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & \alpha-3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & \beta+2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & \beta+2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\beta = 0$ gilt; dabei ergibt sich

- für $\alpha = 7$ wegen

$$(A_7|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2-2\,\lambda+\mu \\ 1-3\,\lambda-2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

  sowie

- für $\alpha \neq 7$ wegen

$$(A_\alpha|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{\alpha-7}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2-2\,\lambda \\ 1-3\,\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$