MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

49. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist t ein reeller Parameter.

a) Man untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ erfüllt?

c) Man gebe für $t = 1$ die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung aus b) an.

50. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2016).* In Abhängigkeit von den reellen Parametern α und β sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Man entscheide mit Begründung, für welche Wahl von α und β es

a) keine bzw. b) genau eine bzw. c) mehr als eine

lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3$$

gibt.

51. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x.$$

Es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, daß sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt. Man bestimme eine Basis u_1, u_2 von U und eine Basis w_1, w_2 von W.

b) Man entscheide, ob es eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathrm{Kern}(g) = W$ und $\mathrm{Bild}(g) = U$ gibt, und begründe diese Entscheidung.

52. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2017).* Für eine fest gewählte invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ betrachte man die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(X) = M\left(X + X^\top\right).$$

a) Man zeige, daß f linear ist.

b) Man bestimme eine Basis für den Kern von f.

c) Man entscheide, ob es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$f(X) = A\,X \qquad \text{für alle} \qquad X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gibt, und begründe die Entscheidung.

Abgabe bis Montag, den 3. Februar 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).