MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

45. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{sowie} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben; ferner sei $B_\alpha = A_\alpha A_\alpha^\top \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $B_\alpha\, x = b$ eine eindeutige Lösung?

b) Man bestimme für $\alpha = 1$ die Lösung der Gleichung $B_1\, x = b$.

46. a) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zeige man

$$\operatorname{Rang}(A+B) \le \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B).$$

b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ zeige man

$$\operatorname{Rang}(A\,B) \le \min\left\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\right\}.$$

47. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mapsto 3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1.$$

a) Man zeige, daß f eine lineare Abbildung ist.

b) Man untersuche f auf Injektivität und Surjektivität.

48. Seien V und W reelle Vektorräume sowie $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ zeige man:

$$f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig.}$$

b) Man formuliere die Kontraposition zu a) und entscheide, ob diese allgemeingültig ist.

c) Unter welcher Voraussetzung ist auch die Umkehrung zu a) gültig?

Abgabe bis Montag, den 27. Januar 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).