MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 10
23.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

37. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

erzeugte Untervektorraum. Man zeige, daß V den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

enthält, und bestimme die Dimension von V.

38. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2015).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ist der von

$$p_1 = X^3 - X^2, \quad p_2 = X^3 - X, \quad p_3 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_4 = X^3 - 1$$

erzeugte Untervektorraum U von V gegeben.

a) Man zeige: U ist die Menge aller Polynome $p \in V$, die eine Nullstelle bei 1 besitzen.

b) Man wähle aus p_1, p_2, p_3, p_4 eine Basis von U aus und ergänze diese zu einer Basis von V.

39. Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die vier Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ gegeben.

a) Man bestimme ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

b) Man zeige, daß u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U + W$ bilden, und berechne die Koordinaten von w_2 bezüglich dieser Basis.

c) Man entscheide, ob der Einheitsvektor e_1 in $U + W$ liegt.

40. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2016).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachte man den von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum U sowie den von

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum W.

a) Man ermittle die Dimensionen $\dim(U)$ und $\dim(W)$ von U und W.
b) Man bestimme eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot C$.
c) Man berechne $\dim(U + W)$.
d) Man ergänze die Matrix C von b) zu einer Basis von $U + W$.

Abgabe bis Montag, den 13. Januar 2020, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).