MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 9
16.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I"

33. Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

   b) Welche Möglichkeiten gibt es, aus den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ auszuwählen?

   c) Welche Möglichkeiten gibt es, die in b) ermittelten Basen von V zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzen?

34. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Es sei b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis des reellen Vektorraums V. Ferner seien $a_1 = 2\,b_1 - b_2$, $a_2 = b_2 + b_3 + b_4$, $a_3 = b_3 - b_4$ und $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ der von a_1, a_2, a_3 aufgespannte Unterraum.

   a) Man zeige, daß a_1, a_2, a_3 eine Basis von U ist.

   b) Man zeige, daß $x = 6\,b_1 - 5\,b_2 - 4\,b_4$ in U liegt, und bestimme die Koordinaten von x bezüglich a_1, a_2, a_3.

   c) Man ergänze a_1, a_2, a_3 zu einer Basis von V.

35. a) Sei v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Für welche reellen Zahlen s, t ist auch w_1, w_2 mit $w_1 = s \cdot v_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + t \cdot v_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

   b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Seien v und w linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V sowie α und β zwei reelle Zahlen. Man zeige: Die Vektoren $x = \alpha v + \beta w$ und $y = \beta v + \alpha w$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha = -\beta$ ist.

36. Im $\mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachte man den Unterraum $U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$ sowie den von $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ erzeugten Unterraum $W = \langle B_1, B_2, B_3, B_4 \rangle$.

   a) Welche Möglichkeiten gibt es, aus B_1, B_2, B_3, B_4 eine Basis von W auszuwählen?

   b) Man ergänze eine in a) ermittelte Basis von W zu einer Basis von U.

   c) Man ergänze die Basis aus b) zu einer Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Abgabe bis Montag, den 23. Dezember 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).