MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 8
09.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

29. Im $\mathbb{R}^3$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

    a) Man gebe die Menge M aller t an, für die v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

    b) Man bestimme für $t \in M$ die Koordinaten sowie die Komponenten der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.

    c) Man bestimme für $t \notin M$ den Unterraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der v_1, v_2, v_3 an.

30. Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

    a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind, und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 an.

    b) Man wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ aus.

    c) Mit welchen Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ kann die in b) ermittelte Basis von V zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzt werden?

31. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Es werde der $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ aller reellen Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ betrachtet. Man zeige:

    a) Die Teilmenge $U = \{p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ aller Polynome $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$, welche die Nullstelle 1 besitzen, ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

    b) Es ist $X - 1$, $X^2 - 1$, $X^3 - 1$ eine Basis von U.

32. a) Man zeige, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, und gebe die analoge Basis für $\mathbb{R}^{m\times n}$ an.

    b) Bilden auch $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

Abgabe bis Montag, den 16. Dezember 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).