MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 7
02.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

25. Im reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind die Teilmengen $U = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid B^\top = B\}$ und $W = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid B^\top = -B\}$ gegeben.

    a) Man zeige, daß U und W Unterräume von V sind.

    b) Man zeige, daß für jede Matrix $A \in V$ zum einen $A + A^\top \in U$ und zum anderen $A - A^\top \in W$ gilt.

    c) Man bestimme $U \cap W$ und $U + W$.

26. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^4$, die eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 sind, und gebe für u und w gegebenenfalls eine solche an.

27. a) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Für die beiden Unterräume

$$U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    des $\mathbb{R}^3$ bestimme man einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

    b) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Man zeige, daß die beiden Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

    des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen.

28. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei J_n die Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind; ferner sei $U = \langle E_n, J_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

    a) Man berechne $J_n \cdot J_n$.

    b) Man zeige: für alle Matrizen A, $B \in U$ gilt $A \cdot B \in U$.

Abgabe bis Montag, den 9. Dezember 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).