MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

21. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

   a) Man zeige, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

   b) Man bestimme die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

   c) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

22. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$ zeige man:

   a) A ist genau dann invertierbar, wenn $\widetilde{A}$ invertierbar ist.

   b) Es gilt $\det(\widetilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$.

23. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Unterräume von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ handelt:

   a) $U_1 = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \text{ mit } a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\}$,

   b) $U_2 = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X \text{ mit } a,\, b \in \mathbb{R}\}$,

   c) $U_3 = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(f) \geq 2\}$,

   d) $U_4 = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \text{ mit } a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \text{ und } c \neq 0\}$.

24. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 3}$ sind die beiden Teilmengen

$$M = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\right\} \qquad \text{und} \qquad N = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = -A\right\}$$

   gegeben.

   a) Man untersuche, ob M bzw. N ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

   b) Man untersuche, ob M eine Teilmenge von N bzw. ob N eine Teilmenge von M ist.

Abgabe bis Montag, den 2. Dezember 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).