MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I"

17. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Man untersuche die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

auf Invertierbarkeit und bestimme gegebenenfalls die dazu inverse Matrix

a) mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen,

b) mit Hilfe der Determinante und der komplementären Matrix.

18. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige mit Hilfe vollständiger Induktion

$$\det(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases}$$

19. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ zeige man: für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\det\left(E_n + x \cdot y^\top\right) = 1 + x^\top \cdot y.$$

20. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachte man die beiden Mengen

$$M = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \cdot A^\top = E_n\right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = \pm 1\right\}.$$

Man beweise, daß $(M, \cdot)$ und $(N, \cdot)$ Gruppen sind, und zeige $M \subsetneq N \subsetneq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Abgabe bis Montag, den 25. November 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).