MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

13. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Man berechne $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$.

   b) Man bestimme $\det(\frac{1}{3}A)$, $\det(B^{-1}B^\top)$ und $\det(CBC^{-1})$.

14. In Abhängigkeit vom reellen Parameter t betrachte man die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man untersuche A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Invertierbarkeit und bestimme in diesen Fällen $\det(A_t^{-1})$.

   b) Sei nun $t = 1$ gewählt. Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B^{10} = A_t$ bzw. eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $C^{10} = A_t^{-1}$?

15. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

   ferner werde die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit O bezeichnet.

   a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $A\,x = 0$ und finde alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A\,B = O$.

   b) Man gebe eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$ mit $A\,B = O$ (wie in Teil a)) an, so dass *zusätzlich* auch $B\,A = O$ gilt.

16. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachte man die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2)$.

   a) Man zeige, daß $p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A) \cdot \lambda + \det(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

   b) Man bestimme die Matrix $A^2 - \mathrm{Spur}(A) \cdot A + \det(A) \cdot E_2$.

   c) Man gebe Beispiele von Matrizen A an, für die p keine bzw. eine doppelte bzw. zwei einfache Nullstellen besitzt.

   d) Man zeige, daß p für eine symmetrische Matrix A mindestens eine Nullstelle besitzt. In welchen Fällen liegt dabei eine doppelte Nullstelle vor?

Abgabe bis Montag, den 18. November 2019, 12^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).