

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

5. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).

a) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^4$?

6. a) Man berechne für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

alle Produkte aus je zwei Faktoren, sofern diese definiert sind.

b) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ berechne man die Matrix $A^3 - 5A^2 + 4A + E$.

7. (Staatsexamensaufgabe Herbst 2007). Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

betrachte man die Determinante $\delta = ad - bc$ sowie die Spur $s = a + d$.

a) Man zeige: $\delta \cdot E_2 - s \cdot A + A^2 = 0$.

b) Man folgere aus a):

$$A^2 = E_2 \iff ((s = 0 \wedge \delta = -1) \vee (b = c = 0 \wedge a^2 = d^2 = 1))$$

8. a) Man zeige, daß für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(ii) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

(iii) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(iv) $AB = BA$.

b) Man entscheide mit Hilfe von a), unter welcher Bedingung an ihre Koeffizienten für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} c & d_1 \\ d_2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

die drei „binomischen Formeln“ gelten.

Abgabe bis Montag, den 4. November 2019, 12⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).