MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Klausur
03.04.2012

Wiederholungsklausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

1. a) Man nenne für $m \times n$–Matrizen die drei Typen elementarer Zeilenumformungen und gebe drei zu einer $m \times n$–Matrix gebildete Größen an, die sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht ändern (es werden die drei erstgenannten Größen bewertet). (3)

   b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde die $n \times n$–Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & \dots & & 2 \\ -2 & -2 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2 & & & \ddots & \ddots & 2 \\ -2 & -2 & \dots & \dots & -2 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

   betrachtet. Man berechne zunächst $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$ und zeige dann mit vollständiger Induktion

$$\det(A_n) = \frac{(n+2)!}{4} \quad \text{für alle} \quad n \geq 2. \qquad (3)$$

2. a) Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

   invertierbar ist, und bestimme hierfür die inverse Matrix. (3)

   b) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zeige man: ist $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $\text{Rang}(A) = n$. (3)

3. Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad a_0 + a_1X + a_2X^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix},$$

sowie die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, daß f linear ist. (2)

b) Man zeige, daß B_1, B_2, B_3, B_4 eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist. (2)

c) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. (2)

4. a) Man definiere

- für einen reellen Vektorraum V den Begriff „Dimension von V", (1)
- für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ die Begriffe „Kern von f" und „Bild von f". (1)

b) Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Dimension des von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -s \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -s^2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraums $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. (2)

c) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der in b) betrachtete Unterraum. Man entscheide, für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ es eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Kern}(f) = U$ gibt, und begründe die Entscheidung. (2)