MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 14
06.02.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

53. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\; b_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\; b_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\; c_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sowie die Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

a) Man zeige, daß b_1, b_2, b_3 bzw. c_1, c_2 Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Für die lineare Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsmatrix A gebe man die darstellende Matrix bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2 an.

c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2 durch die Matrix A dargestellt. Man bestimme die Abbildungsmatrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A'}$.

54. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X).$$

a) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

b) Man entscheide, ob f injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

c) Man bestimme $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ sowie die Dimensionen dieser beiden Räume.

55. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2000).* Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Man beweise:

a) Wenn es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die nicht surjektiv ist, so gilt $\dim(V) < \dim(W)$.

b) Wenn es keine injektive lineare Abbildung von V nach W gibt, so gilt $\dim(V) > \dim(W)$.

56. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Man bestimme

a) den Rang r der Matrix A,

b) eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der Abbildung ℓ_A sowie

c) Matrizen $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ mit $PAQ = \begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.