MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 13
30.01.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

49. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).* In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

gegeben. Die zugehörige lineare Abbildung sei

$$f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_s(x) = A_s \cdot x.$$

a) Man bestimme alle Parameter $s \in \mathbb{R}$, für welche die lineare Abbildung f_s surjektiv ist, und berechne hierfür $\text{Kern}\,(f_s)$.

b) Nun sei $s = 0$ gewählt. Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildraums von f_0.

50. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2004).*

a) Man zeige, daß $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist, und bestimme S^{-1}.

b) Im $\mathbb{R}^3$ seien $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Man zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$ gibt, und bestimme die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f = \ell_A$.

51. Für einen Vektorraum V mit $\dim(V) < \infty$ zeige man: es gibt genau dann einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit $\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f)$, wenn $\dim(V)$ gerade ist.

52. Es seien V und W reelle Vektorräume sowie $f : V \to W$ eine lineare Abbildung; ferner seien U ein Unterraum von V und X ein Unterraum von W. Man zeige:

a) $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$ ist ein Unterraum von W.

b) $f^{-1}(X) = \{v \in V \mid f(v) \in X\}$ ist ein Unterraum von V.

c) f ist genau dann surjektiv, wenn $\text{Bild}(f) = W$ ist.

d) f ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$ ist.