MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 12
23.01.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

45. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).* Gegeben sei das von den Parametern r, s, $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 4 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & r\,x_3 & & & = & 1 \\ s\,x_1 & & & + & x_3 & + & t\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

   a) Für welche Wahl der Parameter ist die Lösungsmenge eindimensional?

   b) Für welche Wahl der Parameter ist die Lösungsmenge zweidimensional? Man löse das lineare Gleichungssystem für diese Wahl der Parameter.

46. Man bestimme in Abhängigkeit vom reellen Parameter α den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 2 \\ -2\,\alpha & -\frac{3}{2}\,\alpha & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   sowie die Dimension des Unterraums $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 0\}$.

47. Unter der *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ versteht man die Summe ihrer Diagonalelemente, es ist also $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$. Man zeige:

   a) $\mathrm{Spur} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

   b) Für alle A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

   c) Es gibt A, B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{Spur}(ABC) \neq \mathrm{Spur}(BAC)$.

   d) Gibt es Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A\,B - B\,A = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $\lambda = 0$.

48. Seien V und W reelle Vektorräume sowie $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

   a) Für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ zeige man:

$$f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig} \implies v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig.}$$

   b) Man formuliere die Kontraposition zu a) und entscheide, ob diese allgemeingültig ist.

   c) Unter welcher Voraussetzung ist auch die Umkehrung zu a) gültig?