Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

37. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 und v_4 in einem echten Unterraum $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ von $\mathbb{R}^4$ enthalten sind.

   b) Man bestimme alle Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$, die in dem Unterraum $U \subsetneq \mathbb{R}^4$ liegen.

38. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Sei b_1, b_2, b_3 Vektoren eines reellen Vektorraums V. Man zeige:

   a) Die Vektoren $v_1 = b_1 + b_2 + b_3$, $v_2 = b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3$, $v_3 = 2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3$ und $v_4 = 3\,b_1 + b_2 + 2\,b_3$ sind linear abhängig.

   b) Ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von V, so sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

39. Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

   sowie die Unterräume $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ und $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid B \cdot x = 0\}$.

   a) Man bestimme Basen von U und W sowie ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

   b) Man ergänze v zu Basen von U und W und gebe eine Basis von $U + W$ an.

40. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2008).*

   a) Es seien W_1 und W_2 Untervektorräume eines reellen Vektorraums V. Wie lautet die Dimensionsformel für Summe $W_1 + W_2$ und Durchschnitt $W_1 \cap W_2$?

   b) Welche Dimension kann $W_1 \cap W_2$ haben, wenn $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$ und $V = \mathbb{R}^5$ ist? Man belege jeden möglichen Wert von $\dim(W_1 \cap W_2)$ durch ein Beispiel.