MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 9
19.12.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

33. Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

    a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind, und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 an.

    b) Man wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ aus.

    c) Mit welchen Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ kann die in b) ermittelte Basis von V zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzt werden?

34. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von V. Für die reellen Zahlen β_1, β_2, β_3, β_4 betrachte man die Vektoren $v_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3$, $v_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4$, $v_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3$ und $v_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$. Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 genau dann eine Basis von V ist, wenn $(1 - \beta_1\,\beta_3)\,(1 - \beta_2\,\beta_4) \neq 0$ gilt.

35. Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die vier Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

    sowie die beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2\rangle$ und $W = \langle w_1, w_2\rangle$ gegeben.

    a) Man bestimme ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

    b) Man zeige, daß u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U + W$ bilden, und berechne die Koordinaten von w_2 bezüglich dieser Basis.

    c) Man entscheide, ob der Einheitsvektor e_1 in $U + W$ liegt.

36. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002).* Es seien a, b, c und d linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

    aufgespannten Unterraums.