MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 8
12.12.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

29. Im $\mathbb{R}^3$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

   b) Man bestimme für $t = 4$ und $t = 6$ die Koordinaten sowie die Komponenten der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.

   c) Man bestimme für $t = 5$ und $t = 6$ den Unterraum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der v_1, v_2, v_3 an.

30. Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

   b) Man zeige, daß je drei der Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig sind.

   c) Man stelle jeden der vier Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 als Linearkombination der anderen drei Vektoren dar.

31. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ gegeben.

   a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig sind.

   b) Man zeige, daß v_1, v_2, v_4 eine Basis von V ist, und stelle v_3 als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

   c) Man ergänze v_1, v_2, v_4 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

32. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$–Vektorraum aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq n$.

   a) Man zeige, daß die Polynome 1, X, X^2, X^3 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ bilden, und gebe die analoge Basis für $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ an.

   b) Man entscheide, ob auch die Polynome 1, $X+1$, X^2+X+1, X^3+X^2+X+1 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ bilden.