MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 6
28.11.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

21. Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Unterräume von $\mathbb{R}^3$ handelt:

 a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

 b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{Z}\}$

 c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2\,x_2 = 3\,x_3\}$

 d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2 \cdot x_3\}$

22. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004).* Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; ferner bezeichne U die Menge aller Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot X = X \cdot A$.

 a) Man drücke die Beziehung $A \cdot X = X \cdot A$ als homogenes lineares Gleichungssystem in x_1, x_2, x_3, x_4 aus und bestimme dessen Lösungsraum $L \subseteq \mathbb{R}^4$.

 b) Man zeige
$$U = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot E_2 \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

23. Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Teilmengen $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_3 = u_1 + u_2\}$ und $W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = w_2\}$ gegeben.

 a) Man zeige, daß U und W Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

 b) Man zeige für die Einheitsvektoren e_1, e_2, $e_3 \in U + W$ explizit.

 c) Man bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$.

24. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum sowie u, $v \in V$ und λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Man zeige:

 a) Man berechne $\lambda \cdot ((u - v) + v)$ auf zwei verschiedene Arten und zeige damit $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$; analog beweise man $(\lambda - \mu) \cdot v = \lambda \cdot v - \mu \cdot v$.

 b) Man berechne $\lambda \cdot (0_V + 0_V)$ auf zwei verschiedene Arten und zeige damit $\lambda \cdot 0_V = 0_V$; analog beweise man $0 \cdot v = 0_V$.

 c) Man folgere $(-\lambda) \cdot v = -\lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v)$ aus a) und b).

 d) Man zeige: $\lambda \cdot v = 0_V \iff \lambda = 0$ oder $v = 0_V$.