MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 5
21.11.2011

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

17. Für den reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

    a) Man berechne $\det(A)$ und bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die A invertierbar ist.

    b) Man berechne die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ und bestimme, sofern möglich, die inverse Matrix A^{-1}.

18. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

    a) Man zeige, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

    b) Man bestimme die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

    c) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

19. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{mit} \qquad a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{für } i = j, \\ 1, & \text{für } i = j+1, \\ 1, & \text{für } i = j-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

    a) Man ermittle $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

    b) Man drücke $\det(A_n)$ für $n \geq 3$ durch $\det(A_{n-2})$ und $\det(A_{n-1})$ aus.

    c) Man berechne $\det(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

20. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002).* Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Man zeige die Äquivalenz der beiden folgenden Eigenschaften:

    a) A ist invertierbar, und alle Koeffizienten von A^{-1} sind wieder ganze Zahlen.

    b) Es ist $\det(A) = \pm 1$.