MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 13
03.02.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

49. a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-4\text{I, IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Damit ist $\mathrm{Rang}(A) = 2$ sowie

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot u \quad \text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} U &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

und damit wegen der Linearität von f

$$\begin{aligned} f(U) &= \{\lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \lambda_3 f(u_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle f(u_1), f(u_2), f(u_3) \rangle \end{aligned}$$

mit

$$f(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = (-9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(u_2) = A \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = (-9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(u_3) = A \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -54 \\ 0 \\ -54 \end{pmatrix} = (-27) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

damit erhält man

$$f(U) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man auch wie folgt schließen: Es ist $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Wegen $u_3 = 2 \cdot u_1 + u_2$ gilt sogar

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle \qquad \text{und damit} \qquad f(U) = \langle f(u_1), f(u_2) \rangle.$$

Ferner ist $u_2 = u_1 + u$ mit $u \in \text{Kern}(f)$ und folglich

$$f(u_2) = f(u_1) + f(u) = f(u_1),$$

womit sich $f(U) = \langle f(u_1) \rangle$ ergibt. Schließlich erhält man wegen

$$f(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = (-9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad f(U) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Da der Spaltenraum von A' von den ersten beiden Spalten von A' erzeugt wird, erzeugen auch die ersten beiden Spalten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von A den Spaltenraum von A, also Bild(f). Wegen

$$(s_1, s_2 \mid e_3) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-4\text{I, IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist der Vektor $b = e_4$ keine Linearkombination von s_1 und s_2, liegt folglich auch nicht in Bild(f).

50. a) Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E_3|B^{-1});$$

damit ist B invertierbar, insbesondere also v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $C = (w_1, w_2)$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

damit ist C invertierbar mit

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Für die darstellende Matrix M von $\ell_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen gilt demnach

$$M = C^{-1} A_1 B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Da v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es (gemäß dem Prinzip der linearen Fortsetzung) für jede Vorgabe von Vektoren w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{R}^2$ genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3.$$

Mit $C' = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gilt dann für die Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A_2}$

$$A_2 \cdot v_1 = f(v_1) = w_1, \quad A_2 \cdot v_2 = f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad A_3 \cdot v_3 = f(v_3) = w_3$$

und damit

$$A_2 \cdot B = (A_2 \cdot v_1, A_2 \cdot v_2, A_2 \cdot v_3) = (w_1, w_2, w_3) = C',$$

also

$$A_2 = C' \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Gemäß a) ist w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$; demnach gibt es eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad g(w_1) = 0 \quad \text{und} \quad g(w_2) = v_1;$$

damit ist

$$\mathbb{R} \cdot w_1 \subseteq \operatorname{Kern}(g) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R} \cdot v_1 \subseteq \operatorname{Bild}(g),$$

und mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Kern}(g) + \dim \operatorname{Bild}(g) = 2$$

erhält man schon

$$\operatorname{Kern}(g) = \mathbb{R}\, w_1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Bild}(g) = \mathbb{R}\, v_1.$$

Mit $B' = (0, v_1) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ergibt sich für die Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $g = \ell_{A_3}$

$$A_3 \cdot w_1 = g(w_1) = 0 \quad \text{und} \quad A_3 \cdot w_2 = g(w_2) = v_1$$

und damit

$$A_3 \cdot C = (A_3 \cdot w_1, A_3 \cdot w_2) = (0, v_1) = B',$$

also

$$A_3 = B' \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

51. a) Für alle p, $q \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (p+q)' - (X+1)\cdot(p+q)'' \\ &= (p'+q') - (X+1)\cdot(p''+q'') \\ &= (p'+q') - ((X+1)\cdot p'' + (X+1)\cdot q'') \\ &= (p' - (X+1)\cdot p'') + (q' - (X+1)\cdot q'') \\ &= f(p) + f(q); \end{aligned}$$

damit ist f additiv; ferner gilt für alle $p \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot p) &= (\lambda \cdot p)' - (X+1)\cdot(\lambda \cdot p)'' \\ &= \lambda \cdot p' - (X+1)\cdot(\lambda \cdot p'') \\ &= \lambda \cdot (p' - (X+1)\cdot p'') \\ &= \lambda \cdot f(p); \end{aligned}$$

damit ist f auch homogen, insgesamt also linear.

b) Wegen

$$\begin{array}{rcrcrrr} f(1) &=& 0 - (X+1)\cdot 0 &=& 0\cdot 1 + & 0\cdot X + & 0\cdot X^2 \\ f(X) &=& 1 - (X+1)\cdot 0 &=& 1\cdot 1 + & 0\cdot X + & 0\cdot X^2 \\ f(X^2) &=& 2X - (X+1)\cdot 2 &=& (-2)\cdot 1 + & 0\cdot X + & 0\cdot X^2 \\ f(X^3) &=& 3X^2 - (X+1)\cdot 6X &=& 0\cdot 1 + & (-6)\cdot X + & (-3)\cdot X^2 \end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Wegen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{6}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\ell_M)$ sowie

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\ell_M)$; damit ist

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1, \\ 0\cdot 1 + 2\cdot X + 1\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 2X + X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ sowie

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 &= 1, \\ 0\cdot 1 - 6\cdot X - 3\cdot X^2 &= -6X - 3X^2 \end{aligned}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

52. a) Für die gegebene Abbildungsmatrix gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $r = \mathrm{Rang}(A) = 2$; folglich erhält man

$$\dim \mathrm{Kern}(f) = 4 - r = 2 \qquad \text{und} \qquad \dim \mathrm{Bild}(f) = r = 2.$$

Genauer gilt:

- $U = \text{Kern}(f)$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den beiden freien Variablen x_3 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von U.
- $W = \text{Bild}(f)$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da x_1 und x_2 die beiden gebundenen Variablen sind, ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von W.

b) Mit $b_1 = e_1$ und $b_2 = e_2$ sowie $b_3 = u_1$ und $b_4 = u_2$ ist b_1, b_2, b_3, b_4 wegen

$$\det(b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$, und mit $c_1 = w_1$, $c_2 = w_2$ und $w_3 = e_3$ ist c_1, c_2, c_3 wegen

$$\det(c_1, c_2, c_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$\begin{array}{ccccccccccc}
f(b_1) & = & A \cdot e_1 & = & w_1 & = & 1 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\
f(b_2) & = & A \cdot e_2 & = & w_2 & = & 0 \cdot c_1 & + & 1 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\
f(b_3) & = & A \cdot u_1 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3 \\
f(b_4) & = & A \cdot u_2 & = & 0 & = & 0 \cdot c_1 & + & 0 \cdot c_2 & + & 0 \cdot c_3
\end{array}$$

besitzt die darstellende Matrix von f bezüglich dieser beiden Basen die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$