MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 12
27.01.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

45. a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+5\text{II}}{\overset{\text{I}-3\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \operatorname{Rang}(A) = 2$ und damit

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = 4 - r = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \dim \operatorname{Bild}(f) = r = 2;$$

genauer gilt:

- $U = \operatorname{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_2 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von U.
- $W = \operatorname{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste und dritte Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste und dritte Spalte von A, also

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

  eine Basis von W.

b) Für eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{Kern}(g) = W$ und $\operatorname{Bild}(g) = U$ müßte nach der Dimensionsformel

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Kern}(g) + \dim \operatorname{Bild}(g) = \dim W + \dim U = 2 + 2 = 4$$

gelten; daher kann es keine derartige lineare Abbildung geben.

46. a) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & t \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(0 + 0 + t^2\right) - (0 + 0 + 4) = t^2 - 4$$

ist dies genau für

$$t^2 - 4 \neq 0 \iff t^2 \neq 4 \iff t \neq \pm 2$$

der Fall. Für $t = 2$ ist $v_2 = v_3$ und damit

$$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = 0,$$

für $t = -2$ ist $v_2 + v_3 = 2\,v_1$ und damit

$$(-2) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$$

eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors aus den dann linear abhängigen Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$.

b) Im Hinblick auf a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $t \neq \pm 2$ sind $v_1,\ v_2,\ v_3$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Damit gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

- Für $t = 2$ gilt $v_2 = v_3$; wegen $w_2 \neq w_3$ kann es überhaupt keine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ geben, insbesondere existiert damit auch keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.
- Für $t = -2$ liegt die nichttriviale Linearkombination

$$-2\,v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

des Nullvektors aus den Vektoren $v_1,\ v_2,\ v_3$ vor; dies entspricht genau

$$-2\,w_1 + w_2 + w_3 = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Die linear unabhängigen Vektoren $v_1,\ v_2$ lassen sich nun zu einer Basis $v_1,\ v_2,\ v_4$ von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, und für jede Wahl des Vektors $w_4 \in \mathbb{R}^3$

gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine (zu w_4 eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_4) = w_4,$$

welche dann auch

$$f(v_3) = f(2\,v_1 - v_2) = 2\,f(v_1) - f(v_2) = 2\,w_1 - w_2 = w_3$$

erfüllt. Folglich gibt es in diesem Fall insgesamt unendlich viele lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3.$$

47. a) Für den $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit $\dim V < \infty$ betrachten wir den Endomorphismus $f : V \to V$ mit den Unterräumen $U = \operatorname{Kern}(f)$ und $W = \operatorname{Bild}(f)$ von V. Wir erhalten zum einen mit der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

und zum anderen mit der Dimensionformel für lineare Abbildungen

$$\dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim V,$$

woraus sich wegen

$$\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0_V\}, \qquad \text{also} \qquad \dim(U \cap W) = 0,$$

zusammen dann

$$\begin{aligned}\dim V = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) = \dim U + \dim W =\\ = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U + W)\end{aligned}$$

ergibt; wegen $U + W \subseteq V$ folgt daraus schon

$$V = U + W, \qquad \text{also} \qquad V = \operatorname{Kern}(f) + \operatorname{Bild}(f),$$

mit $\operatorname{Kern}(f) \cap \operatorname{Bild}(f) = \{0_V\}$ also $V = \operatorname{Kern}(f) \oplus \operatorname{Bild}(f)$.

b) Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ mit $f \circ f = f$ betrachten wir den Bildraum

$$\operatorname{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

sowie die Menge $\operatorname{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f, also

$$\operatorname{Fix}(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\},$$

und haben $\operatorname{Bild}(f) = \operatorname{Fix}(f)$ zu zeigen:

- Für „$\subseteq$“ sei $v \in \operatorname{Bild}(f)$, es gibt also ein $u \in V$ mit $v = f(u)$; wegen

$$f(v) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = f(u) = v$$

ergibt sich damit $v \in \operatorname{Fix}(f)$.

- Für „$\supseteq$“ sei $v \in \mathrm{Fix}(f)$; es ergibt sich direkt $v = f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$.

Für jedes $v \in \mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f)$ gilt

- zum einen $v \in \mathrm{Bild}(f)$, also $v \in \mathrm{Fix}(f)$, und damit $f(v) = v$,
- zum anderen $v \in \mathrm{Kern}(f)$ und damit $f(v) = 0_V$,

zusammen also $v = f(v) = 0_V$; demnach ist $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$, woraus gemäß a) dann $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$ folgt.

48. Für alle A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(A+B) = (A+B)\cdot M - M\cdot(A+B) &= \\ &= (A\cdot M + B\cdot M) - (M\cdot A + M\cdot B) = \\ &= (A\cdot M - M\cdot A) + (B\cdot M - M\cdot B) = f(A) + f(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot A) = (\lambda\cdot A)\cdot M - M\cdot(\lambda\cdot A) &= \\ &= \lambda\cdot(A\cdot M) - \lambda\cdot(M\cdot A) = \lambda\cdot(A\cdot M - M\cdot A) = \lambda\cdot f(A); \end{aligned}$$

damit ist f linear. Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} f(A) &= A\cdot M - M\cdot A \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 2\,a_{11} + 3\,a_{12} \\ a_{21} & 2\,a_{21} + 3\,a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} + 2\,a_{21} & a_{12} + 2\,a_{22} \\ 3\,a_{21} & 3\,a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ ergibt sich:

- Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Kern}(f) \iff f(A) = 0 &\iff \\ \iff \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \\ \iff a_{21} = 0 \quad \text{und} \quad a_{22} = a_{11} + a_{12}; \end{aligned}$$

damit besteht $\mathrm{Kern}(f)$ genau aus den Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11} + a_{12} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit a_{11}, $a_{12} \in \mathbb{R}$. Folglich bilden die beiden Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Kern}(f)$; wegen

$$\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sind B_1, B_2 auch linear unabhängig und damit sogar eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$. Insgesamt ergibt sich also

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = 2.$$

- Für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$f(A) = \begin{pmatrix} -2\,a_{21} & 2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22} \\ -2\,a_{21} & 2\,a_{21} \end{pmatrix} =$$
$$= (-2\,a_{21}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (2\,a_{11} + 2\,a_{12} - 2\,a_{22}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die beiden Matrizen

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild}(f)$; wegen

$$\lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

für alle $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ sind B_3, B_4 auch linear unabhängig und damit sogar eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$. Insgesamt ergibt sich also

$$\dim \operatorname{Bild}(f) = 2.$$