MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 11
20.01.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

41. a) Wir betrachten für das durch die beiden Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & (2-b)\,x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 1-b \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2\,x_1 & - & 2\,b\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2\,b \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 2 & -2b & 1 & -1 & 3-a-2\,b \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & 1-a \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+4\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3\,a-3 \end{array}\right) \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-a \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und besitzt in x_4 genau eine freie Variable; folglich ist die Lösungsmenge L eine Gerade. Für eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Gleichungssystems (also einen Trägerpunkt von L) ergibt sich für $x_4 = a$ dann

- $x_3 - x_4 = 1 - a$, also $x_3 = (1-a) + x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = a - 1$, also $x_2 = (a-1) + 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 1 - b$, also $x_1 = (1-b) - (2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = 1$,

insgesamt damit

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix};$$

für einen Basisvektor u des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems (also einen Richtungsvektor von L) ergibt sich für $x_4 = 1$ dann

- $x_3 - x_4 = 0$, also $x_3 = x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 0$, also $x_1 = -(2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = b$,

insgesamt damit

$$u = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich erhält man

$$L = x_p + \mathbb{R} \cdot u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Der Punkt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\, b \\ 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ a + \lambda \end{pmatrix} \in L$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Hyperebene H des $\mathbb{R}^4$ mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

wenn

$$(1 + \lambda\, b) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + (a + \lambda) = 0,$$

also

$$(b+3)\,\lambda + (3+a) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (*) \quad (b+3)\,\lambda = -\,(3+a)$$

gilt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $b \neq -3$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung, nämlich $\lambda = -\frac{3+a}{b+3}$; folglich ist $L \cap H$ ein Punkt.
- Für $b = -3$ besitzt $(*)$ die Gestalt $0 = -(3+a)$ und damit
  - für $a \neq -3$ keine Lösung, weswegen dann $L \cap H$ leer ist, sowie
  - für $a = -3$ die Lösungsmenge $\mathbb{R}$, weswegen dann $L \subseteq H$ gilt.

42. Für a, $b \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4};$$

zur Bestimmung von $r = \mathrm{Rang}(A)$ und damit der Dimension des Unterraums $U = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ über die Beziehung $\dim U = 4 - r$ treffen wir im Hinblick auf

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \underset{\text{((I+II)+III)+IV}}{\overset{\text{Spalten}}{=}}$$
$$= \begin{vmatrix} a+3\,b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (a+3\,b)\,(a-b)^3$$

die folgende Fallunterscheidung:

- Für $a \neq -3\,b$ und $a \neq b$ ergibt sich $\det(A) \neq 0$; damit ist die Matrix A invertierbar und besitzt den vollen Rang $r = 4$.
- Für $a = -3\,b$ ist

$$A = \begin{pmatrix} -3\,b & b & b & b \\ b & -3\,b & b & b \\ b & b & -3\,b & b \\ b & b & b & -3\,b \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b & b & b & -3\,b \\ b & -3\,b & b & b \\ b & b & -3\,b & b \\ -3\,b & b & b & b \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}+3\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} b & b & b & -3\,b \\ 0 & -4\,b & 0 & 4\,b \\ 0 & 0 & -4\,b & 4\,b \\ 0 & 4\,b & 4\,b & -8\,b \end{pmatrix} \underset{\text{IV+II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b & b & b & -3\,b \\ 0 & -4\,b & 0 & 4\,b \\ 0 & 0 & -4\,b & 4\,b \\ 0 & 0 & 4\,b & -4\,b \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} b & b & b & -3\,b \\ 0 & -4\,b & 0 & 4\,b \\ 0 & 0 & -4\,b & 4\,b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  und für den Rang ergibt sich damit

$$r = \begin{cases} 3, & \text{falls } b \neq 0, \\ 0, & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

- Für $a = b$ ist

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  und für den Rang ergibt sich damit

$$r = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \neq 0, \\ 0, & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$r = \mathrm{Rang}(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a = b = 0, \\ 1, & \text{falls } a = b \neq 0, \\ 3, & \text{falls } a = -3\,b \neq 0, \\ 4, & \text{falls } a \neq b \text{ und } a \neq -3\,b, \end{cases}$$

und damit

$$\dim(U) = 4 - r = \begin{cases} 4, & \text{falls } a = b = 0, \\ 3, & \text{falls } a = b \neq 0, \\ 1, & \text{falls } a = -3\,b \neq 0, \\ 0, & \text{falls } a \neq b \text{ und } a \neq -3\,b. \end{cases}$$

43. Für eine Matrix $M = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den n Spalten $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^m$ bezeichne

$$S_M = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$$

den von $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^m$ erzeugte Spaltenraum von M, und damit ist

$$\mathrm{Rang}(M) = \dim(S_M).$$

a) Für die Matrizen $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist

$$A + B = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

und wegen

$$\begin{aligned} S_{A+B} &= \langle a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n \rangle \\ &\subseteq \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \rangle \\ &= \langle a_1, \ldots, a_n \rangle + \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = S_A + S_B \end{aligned}$$

ergibt sich mit der Dimensionsformel für Unterräume

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A + B) = \dim(S_{A+B}) \leq \dim(S_A + S_B) = \\ = \dim(S_A) + \dim(S_B) - \dim(S_A \cap S_B) \leq \\ \leq \dim(S_A) + \dim(S_B) = \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B). \end{aligned}$$

b) Für die Matrizen $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ist

$$A\,B = A \cdot (b_1, \ldots, b_p) = (A \cdot b_1, \ldots, A \cdot b_p) \in \mathbb{R}^{m \times p},$$

und wegen

$$A \cdot x = \lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n \quad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist
$$S_{A\,B} = \langle A \cdot b_1, \ldots, A \cdot b_p \rangle \subseteq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = S_A$$
und damit
$$\operatorname{Rang}(A\,B) = \dim(S_{A\,B}) \leq \dim(S_A) = \operatorname{Rang}(A);$$
entsprechend erhält man
$$\operatorname{Rang}(A\,B) = \operatorname{Rang}\left((A\,B)^\top\right) = \operatorname{Rang}\left(B^\top A^\top\right) \leq \operatorname{Rang}\left(B^\top\right) = \operatorname{Rang}(B),$$
zusammen also
$$\operatorname{Rang}(A\,B) \leq \min\left\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\right\}.$$

44. Die gegebene Abbildung
$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mapsto 3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1,$$
ordnet jedem Polynom
$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$
mit $\mathrm{Grad}(v) \leq 3$ das „abgeleitete“ Polynom
$$f(v) = 3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$
mit $\mathrm{Grad}(f(v)) \leq 2$ zu; die Abbildung f kann demnach als „Ableitung von Polynomen“ interpretiert werden.

a) Für alle
$$v_1 = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad v_2 = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$
gilt
$$v_1 + v_2 = (a_3 + b_3)\,X^3 + (a_2 + b_2)\,X^2 + (a_1 + b_1)\,X + (a_0 + b_0)$$
und damit
$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= 3\,(a_3 + b_3)\,X^2 + 2\,(a_2 + b_2)\,X + (a_1 + b_1) = \\ &= \left(3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1\right) + \left(3\,b_3X^2 + 2\,b_2X + b_1\right) = f(v_1) + f(v_2); \end{aligned}$$
damit ist f additiv. Für alle
$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
gilt
$$\lambda \cdot v = (\lambda\,a_3)\,X^3 + (\lambda\,a_2)\,X^2 + (\lambda\,a_1)\,X + (\lambda\,a_0)$$
und damit
$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot v) &= 3\,(\lambda\,a_3)\,X^2 + 2\,(\lambda\,a_2)\,X + (\lambda\,a_1) = \\ &= \lambda \cdot \left(3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1\right) = \lambda \cdot f(v); \end{aligned}$$
damit ist f homogen. Folglich ist f eine lineare Abbildung.

b) Für

$$v_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{und} \quad v_2 = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$v_1 \neq v_2 \qquad \text{und} \qquad f(v_1) = 3\,X^2 + 2\,X + 1 = f(v_2);$$

damit ist f nicht injektiv. Für jedes

$$w = b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

gibt es

$$v = \frac{b_2}{3}\,X^3 + \frac{b_1}{2}\,X^2 + b_0 X \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

mit

$$f(v) = 3 \cdot \frac{b_2}{3}\,X^2 + 2 \cdot \frac{b_1}{2}\,X + b_0 = b_2 X^2 + b_1 X + b_0 = w;$$

damit ist f surjektiv.