MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 10
13.01.2012

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

37. a) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (hier für $n = 3$) ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(M) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} (1-s)\cdot \begin{vmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{vmatrix} = $$
$$= (1-s)\cdot\left(1-s^2\right) = (1-s)^2\cdot(1+s)$$

und

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} s^2\cdot \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = $$
$$= s^2\cdot\left(s^2-1\right) = s^2\cdot(s-1)\cdot(s+1)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ ist

- die Matrix A genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ gilt, sowie
- die Matrix B genau dann invertierbar, wenn $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ gilt.

b) Für $s \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ sind gemäß a) die beiden Matrizen A und B invertierbar; folglich ist auch ihr Matrixprodukt $A\cdot B$ invertierbar und besitzt damit vollen Rang. In diesem Fall ist also $\operatorname{Rang}(A\cdot B) = 3$, und für die verbleibenden Fälle ergibt sich:

- Für $s = -1$ ist

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\operatorname{Rang}(A\cdot B) = 1$.

- Für $s = 0$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 2$.
- Für $s = 1$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  und damit $\text{Rang}(A \cdot B) = 0$.

38. Wir treffen hinsichtlich $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ die folgende Fallunterscheidung:

- Im Fall $r = 0$ sind die Einträge der beiden Matrizen A und B alle Null, also auch die Einträge ihres Produktes $A \cdot B$ und es gilt $\text{Rang}(A \cdot B) = 0 = r$; damit ist in diesem Fall die gegebene Beziehung gültig.
- Im Fall $r = 1$ ist die Beziehung nicht gültig; wir wählen als Gegenbeispiel die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = r = 1$. Für das Produkt $A \cdot B$ ergibt sich die Nullmatrix mit $\text{Rang}(A \cdot B) = 0 \neq 1 = r$.
- Im Fall $r = 2$ ist die Beziehung nicht gültig; wir wählen als Gegenbeispiel die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = r = 2$. Für das Produkt ergibt sich

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  mit $\text{Rang}(A \cdot B) = 1 \neq 2 = r$.
- Im Fall $r = 3$ besitzen die beiden Matrizen A und B vollen Rang und sind damit invertierbar; folglich ist auch ihr Produkt $A \cdot B$ invertierbar und besitzt damit ebenfalls den vollen Rang $r = 3$. Damit ist in diesem Fall die gegebene Beziehung gültig.

39. a) Für das gegebene homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 0\\
x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0\\
 & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 0\\
x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0\\ 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 2 & 9 & -5 & 12 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{IV}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{IV}-\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{III}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}-5\cdot\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 & -10 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\mathrm{I}-4\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da es genau zwei freie Unbestimmte, nämlich x_3 und x_5, gibt, besitzt der Lösungsraum L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems die Dimension $\dim L_0 = 2$. Eine Basis u_1, u_2 von L_0 läßt sich etwa dadurch bestimmen, daß man für u_1 zum einen $x_3 = 1$ und $x_5 = 0$ und für u_2 zum anderen $x_3 = 0$ und $x_5 = 1$ wählt; dadurch ergibt sich

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2\\ 3\\ 0\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für das gegebene inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2\,x_1 & + & 9\,x_2 & - & 5\,x_3 & + & 12\,x_4 & + & x_5 & = & 3\\
x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & 5\,x_4 & & & = & 0\\
 & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & + & x_5 & = & 3\\
x_1 & + & 5\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & - & x_5 & = & 3
\end{array}$$

ist der Vektor $x \in \mathbb{R}^5$ mit $x_1 = -12$, $x_2 = 3$ und $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ wegen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrl}
2\cdot(-12) & + & 9\cdot 3 & - & 5\cdot 0 & + & 12\cdot 0 & + & 0 & = & -24 & + & 27 & = 3 \\
(-12) & + & 4\cdot 3 & - & 2\cdot 0 & + & 5\cdot 0 & & & = & -12 & + & 12 & = 0 \\
 & & 3 & - & 0 & + & 2\cdot 0 & + & 0 & = & & & 3 & = 3 \\
(-12) & + & 5\cdot 3 & - & 3\cdot 0 & + & 6\cdot 0 & - & 0 & = & -12 & + & 15 & = 3
\end{array}$$

eine spezielle (partikuläre) Lösung.

c) Die Lösungsmenge L eines inhomogenen linearen Gleichungssystems setzt sich additiv aus einer speziellen (partikulären) Lösung dieses Systems und dem Lösungsraum L_0 des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems zusammen; damit ergibt sich hier

$$L = x + L_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

40. Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$; dabei ergibt sich

$$\begin{aligned}
(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & \alpha - 3 & -12 & 0 \\ 2 & \alpha & 6 & \alpha^2 & 6 \end{array}\right) & \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \\
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & -4 & 1 \\ 0 & \alpha+4 & 0 & \alpha^2 - 16 & 4 \end{array}\right) & \underset{\mathrm{III}-(\alpha+4)\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \\
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3+2\alpha & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha+4) & \alpha(\alpha+4) & -\alpha \end{array}\right) &
\end{aligned}$$

a) Für $\alpha = -3$ ergibt sich ferner

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

so daß

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 6+3\,\lambda \\ 4+7\,\lambda \\ 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des Gleichungssystems darstellt.

b) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung:

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$ gilt $-\alpha(\alpha+4) \neq 0$ und damit

$$\mathrm{Rang}(A|b) = 3 = \mathrm{Rang}(A);$$

  folglich ist das Gleichungssystem lösbar, und für die Dimension des Lösungsraums ergibt sich $4 - \mathrm{Rang}(A) = 1$.

- Für $\alpha = -4$ ergibt sich

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right);$$

  wegen $\mathrm{Rang}(A|b) = 3 \neq 2 = \mathrm{Rang}(A)$ ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

- Für $\alpha = 0$ ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

  wegen $\mathrm{Rang}(A|b) = 2 = \mathrm{Rang}(A)$ ist das Gleichungssystem lösbar, und für die Dimension des Lösungsraumes ergibt sich $4 - \mathrm{Rang}(A) = 2$.