MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 9
23.12.2011

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

33. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ mit

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Wegen

$$(B|v) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I},\ \text{IV}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-7\text{II}}{\overset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{III}\leftrightarrow\frac{1}{4}\text{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ lösbar, also der Vektor v eine Linearkombination der Spalten v_1, v_2, v_3, v_4 der Matrix B; genauer erhält man etwa mit der Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

die Linearkombination

$$v = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = V.$$

Der Spaltenraum $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der Matrix $B = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitzt ferner die Dimension

$$\dim V = \operatorname{Rang} B = 3.$$

34. Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 3; für einen Vektor

$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{sei} \qquad p(v) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sein Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis X^3, X^2, X, 1. Damit ergibt sich für das Erzeugendensystem u_1, u_2, u_3 von U dann

$$p(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für das Erzeugendensystem w_1, w_2 von W dann

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $v \in V_0$ gilt damit

$$\begin{aligned} v \in U \cap W \quad &\Longleftrightarrow \quad v \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \ \text{ und } \ v \in \langle w_1, w_2 \rangle \\ &\Longleftrightarrow \quad p(v) \in \langle p(u_1), p(u_2), p(u_3) \rangle \ \text{ und } \ p(v) \in \langle p(w_1), p(w_2) \rangle \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) = p(v) = \beta_1 p(w_1) + \beta_2 p(w_2) \end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten α_1, α_2, α_3, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Dies führt über

$$\alpha_1 p(u_1) + \alpha_2 p(u_2) + \alpha_3 p(u_3) + \beta_1(-p(w_1)) + \beta_2(-p(w_2)) = 0$$

auf das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$(p(u_1), p(u_2), p(u_3), -p(w_1), -p(w_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

und damit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$v \in U \cap W \iff v = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \lambda\left(X^3+1\right) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot (X^3+1)$, also X^3+1 eine Basis von $U \cap W$.

35. a) Wir weisen anhand des Unterraumkriteriums nach, daß die Teilmenge

$$U = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = A \text{ und } \operatorname{Spur}(A) = 0\right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist:

- Wegen $0^\top = 0$ und $\operatorname{Spur}(0) = 0$ ist $0 \in U$.
- Für alle $A,\ B \in U$ gilt $A^\top = A$ und $\operatorname{Spur}(A) = 0$ sowie $B^\top = B$ und $\operatorname{Spur}(B) = 0$. Dann gilt $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$ und $\operatorname{Spur}(A+B) = \operatorname{Spur}(A) + \operatorname{Spur}(B) = 0 + 0 = 0$, also ist $A + B \in U$.
- Für alle $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A^\top = A$ und $\operatorname{Spur}(A) = 0$; damit gilt $(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot A$ und $\operatorname{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \operatorname{Spur}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$, also ist $\lambda \cdot A \in U$.

Insgesamt ist damit U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

b) Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\begin{aligned} A \in U \quad &\iff \quad A = A^\top \quad \text{und} \quad \operatorname{Spur}(A) = 0 \\ &\iff \quad a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32} \quad \text{und} \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Damit besteht U genau aus den Matrizen A der Gestalt

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= B_1} + a_{12} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_2} + \\ &+ a_{13} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_3} + a_{22} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{= B_4} + a_{23} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= B_5}; \end{aligned}$$

damit bilden $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5$ aber ein Erzeugendensystem von U. Für alle $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & -\lambda_1 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5$ linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U. Folglich ist $\dim(U) = 5$. Es ist $A_1 = B_1 - B_4 \in U$ und $A_2 = -B_2 + B_3 \in U$; für alle $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, damit sind A_1 und A_2 linear unabhängig. Wir zeigen nun, daß die Vektoren $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ B_5$ linear unabhängig sind, und damit wegen $\dim(U) = 5$ schon eine Basis von U sind. Für alle $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot B_1 + \lambda_4 \cdot B_2 + \lambda_5 \cdot B_5 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & -\lambda_2 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 & -\lambda_1 & \lambda_5 \\ \lambda_2 & \lambda_5 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 + \lambda_3 = -\lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_2 = -\lambda_1 = \lambda_5 = -\lambda_3 = 0$, und folglich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Damit sind $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ B_5$ Basis von U.

36. a) Unter wiederholter Anwendung der Dimensionsformel erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) &= \dim((U_1 + U_2) + U_3) \\ &= \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3) \\ &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) + \\ &+ \dim(U_3) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3) \\ &= \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \\ &- \dim(U_1 \cap U_2) - \dim((U_1 + U_2) \cap U_3)\,. \end{aligned}$$

b) Wir zeigen für alle $r \geq 2$ die gewünschte Beziehung

$$\dim(U_1 + \ldots + U_r) \leq \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_r)$$

mit Hilfe vollständiger Induktion.

- „$r = 2$“: Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

- „$r \to r+1$“: Es ist

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + \ldots + U_{r+1}) &= \dim((U_1 + \ldots + U_r) + U_{r+1}) \\ &\leq \dim(U_1 + \ldots + U_r) + \dim(U_{r+1}) \\ &\underset{(*)}{\leq} \dim(U_1) + \ldots + \dim(U_r) + \dim(U_{r+1})\,. \end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ geht die obige Induktionsvoraussetzung ein.