MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 7
09.12.2011

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $B = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3$. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 2 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 7 \\ -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \\ & & \lambda_2 & & & = & 5 \end{array}$$

Aus der vierten Gleichung erhält man $\lambda_2 = 5$, und somit aus der zweiten Gleichung $\lambda_3 = -2$ sowie aus der ersten Gleichung $\lambda_1 = -3$. Man verifiziert sofort

$$B = (-3) \cdot A_1 + 5 \cdot A_2 + (-2) \cdot A_3.$$

Dagegen ist $C$ keine Linearkombination von $A_1$, $A_2$, $A_3$; ansonsten gibt es $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ mit $C = \mu_1 \cdot A_1 + \mu_2 \cdot A_2 + \mu_3 \cdot A_3$, und man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mu_1 & + & \mu_2 & & & = & 1 \\ & & \mu_2 & - & \mu_3 & = & -3 \\ -\mu_1 & & & + & \mu_3 & = & -4 \\ & & \mu_2 & & & = & 6 \end{array}$$

Aus der vierten Gleichung erhält man $\mu_2 = 6$, und somit aus der zweiten Gleichung $\mu_3 = 9$ sowie aus der ersten Gleichung $\mu_1 = -5$. In der dritten Gleichung ergibt sich aber wegen $-(-5) + 9 = 14 \neq -4$ ein Widerspruch.

b) Zunächst kann $g$ keine Linearkombination von $f_1$, $f_2$, $f_3$ sein: ansonsten gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $g = \lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3$, und man erhält

$$\begin{aligned} 4\,X^3 + 5\,X^2 + 3\,X - 2 &= \lambda_1 \cdot (X+1) + \lambda_2 \cdot \left(X^2 + X\right) + \lambda_3 \cdot \left(X^3 + X^2\right) \\ &= \lambda_3\,X^3 + (\lambda_2 + \lambda_3)\,X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\,X + \lambda_1, \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich

$$\lambda_3 = 4, \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 5, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 3, \quad \lambda_1 = -2$$

und damit über die beiden ersten Gleichungen $\lambda_2 = 1$ sowie über die beiden letzten Gleichungen $\lambda_2 = 5$, insgesamt also ein Widerspruch ergibt.
Seien nun $\mu_1,\, \mu_2,\, \mu_3 \in \mathbb{R}$ mit $h = \mu_1 \cdot f_1 + \mu_2 \cdot f_2 + \mu_3 \cdot f_3$. Damit gilt

$$\begin{aligned} 2\,X^3 + 3\,X^2 - X - 2 &= \mu_1 \cdot (X+1) + \mu_2 \cdot \left(X^2 + X\right) + \mu_3 \cdot \left(X^3 + X^2\right) \\ &= \mu_3\,X^3 + (\mu_2 + \mu_3)\,X^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,X + \mu_1, \end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich

$$\mu_3 = 2, \quad \mu_2 + \mu_3 = 3, \quad \mu_1 + \mu_2 = -1, \quad \mu_1 = -2$$

und damit $\mu_2 = 1$ ergibt; man verifiziert sofort

$$h = -2 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 = -2\,f_1 + f_2 + 2\,f_3.$$

26. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$\begin{aligned} (A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & b_3 \\ 2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) &\underset{\text{III}-2\text{I},\ \text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & -3 & -4 & b_4 - 2\,b_1 \end{array}\right) \\ &\underset{\text{IV}+3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & -10 & b_4 + 3\,b_2 - 5\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2\,b_3 + 3\,b_2 - b_1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ genau dann lösbar, der Vektor $v$ also genau dann Linearkombination von $v_1,\, v_2,\, v_3$, wenn $b_4 - 2\,b_3 + 3\,b_2 - b_1 = 0$ gilt. Damit ist

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad (-2) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 = 0$$

eine Linearkombination der $v_1,\, v_2,\, v_3$, während

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 4 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 1 = 3 \neq 0$$

keine Linearkombination der $v_1$, $v_2$, $v_3$ ist. Zur Ermittlung der Koeffizienten für die Darstellung von $u$ als Linearkombination der $v_1$, $v_2$, $v_3$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = u$: wegen

$$(A|u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die einzige Lösung von $A \cdot x = u$; damit erhält man die (eindeutig bestimmte) Linearkombination

$$u = (-3) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = -3\, v_1 + 2\, v_2 + v_3.$$

27. a) Wegen $0^\top = 0$ ist $0 \in U$, es ist also $U \neq \emptyset$. Für alle $A$, $B \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top = A + B,$$

also $A + B \in U$, und

$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot A,$$

also $\lambda \cdot A \in U$. Damit ist $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Wegen $0^\top = 0 = -0$ ist $0 \in W$, es ist also $W \neq \emptyset$. Für alle $A$, $B \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top = (-A) + (-B) = -(A + B),$$

also $A + B \in W$, und

$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot (-A) = -\lambda \cdot A,$$

also $\lambda \cdot A \in W$. Damit ist $W$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Sei $A \in U \cap W$; damit gilt $A^\top = A$ (wegen $A \in U$) und $A^\top = -A$ (wegen $A \in W$) und damit $A = -A$, also $A = 0$. Folglich gilt $U \cap W = \{0\}$.
Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix} \in U + W.$$

Folglich ist $U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Wir setzen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; \text{und} \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ gilt $b = c$ und damit

$$A = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + d \cdot A_3 \in \langle A_1, A_2, A_3 \rangle;$$

also ist $U \subseteq \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$. Wegen $A_1$, $A_2$, $A_3 \in U$ gilt $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle \subseteq U$, zusammen also $U = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$.

Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ gilt $a = d = 0$ und $b = -c$ und damit

$$A = c \cdot A_4 \in \langle A_4 \rangle;$$

also ist $W \subseteq \langle A_4 \rangle$. Wegen $A_4 \in W$ gilt $\langle A_4 \rangle \subseteq W$, zusammen also $W = \langle A_4 \rangle$.

28. a) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$ und $W = \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von $u_1$, $u_2$ als auch Linearkombination von $w_1$, $w_2$ ist, wenn es also Koeffizienten $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,\alpha \\ 4\,\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-3\,\alpha)\cdot u_1 + 4\,\alpha \cdot u_2}_{x\in U} = x = \underbrace{0\cdot w_1 + \alpha\cdot w_2}_{x\in W}, \qquad \text{also} \qquad x = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, weswegen etwa der Vektor $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden kann.

b) Für die gegebenen Unterräume $U = \mathbb{R}\cdot u_1 + \mathbb{R}\cdot u_2$ und $W = \mathbb{R}\cdot w_1 + \mathbb{R}\cdot w_2$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Matrizen

$$A_U = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_W = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Wegen

$$(A_U \,|\, b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ -2 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 + 2\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 + 2\,b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist zum einen

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,b_1 - b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

und wegen

$$(A_W \,|\, b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ -3 & -1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & b_1 \\ -3 & -1 & b_3 \end{array}\right) \overset{\text{II}-2\text{I}}{\underset{\text{III}+3\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & b_1 - 2\,b_2 \\ 0 & 2 & b_3 + 3\,b_2 \end{array}\right) \underset{\text{III}+2\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & b_1 - 2\,b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 + 2\,b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist zum anderen

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,b_1 - b_2 + b_3 = 0 \right\};$$

folglich stimmen $U$ und $W$ überein.