MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 6
02.12.2011

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

21. Wir verwenden das Unterraumkriterium, wonach eine Teilmenge U eines Vektorraums V genau dann ein Untervektorraum (linearer Unterraum) von V ist, wenn die folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

    - Es ist $U \neq \emptyset$; insbesondere muß $0_V \in U$ gelten.
    - Für alle $u,\, w \in U$ gilt $u + w \in U$.
    - Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.

    Für die gegebenen Teilmengen im Vektorraum $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ gilt:

    - Die Teilmenge
    $$U_1 = \big\{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \ \text{ mit } \ a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \big\}$$
    aller reellen Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ enthält das Nullpolynom
    $$f = 0, \qquad \text{also} \qquad f = a\,X^2 + b\,X + c \quad \text{mit} \quad a = b = c = 0;$$
    ferner gilt für alle f und $g \in U_1$ mit
    $$f = a\,X^2 + b\,X + c \qquad \text{und} \qquad g = a'\,X^2 + b'\,X + c'$$
    mit $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ und $a',\, b',\, c' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen
    $$\begin{aligned} f + g &= \big(a\,X^2 + b\,X + c\big) + \big(a'\,X^2 + b'\,X + c'\big) \\ &= \big(a\,X^2 + a'\,X^2\big) + (b\,X + b'\,X) + (c + c') \\ &= (a + a')\,X^2 + (b + b')\,X + (c + c') \end{aligned}$$
    mit $a + a',\, b + b',\, c + c' \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_1$, und zum anderen
    $$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= \lambda \cdot \big(a\,X^2 + b\,X + c\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,X^2\big) + \lambda \cdot (b\,X) + \lambda \cdot c \\ &= (\lambda \cdot a)\,X^2 + (\lambda \cdot b)\,X + (\lambda \cdot c) \end{aligned}$$
    mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b,\, \lambda \cdot c \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot f \in U_1$. Damit ist U_1 ein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

- Die Teilmenge

$$U_2 = \big\{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X \;\text{ mit }\; a,\, b \in \mathbb{R} \big\}$$

aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ und konstantem Glied $c = 0$ enthält das Nullpolynom

$$f = 0, \qquad \text{also} \qquad f = a\,X^2 + b\,X \quad \text{mit} \quad a = b = 0;$$

ferner gilt für alle f und $g \in U_2$ mit

$$f = a\,X^2 + b\,X \qquad \text{und} \qquad g = a'\,X^2 + b'\,X$$

mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a',\, b' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} f + g &= \big(a\,X^2 + b\,X\big) + \big(a'\,X^2 + b'\,X\big) \\ &= \big(a\,X^2 + a'\,X^2\big) + (b\,X + b'\,X) \\ &= (a + a')\,X^2 + (b + b')\,X \end{aligned}$$

mit $a + a',\, b + b' \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_2$, und zum anderen

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= \lambda \cdot \big(a\,X^2 + b\,X\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,X^2\big) + \lambda \cdot (b\,X) \\ &= (\lambda \cdot a)\,X^2 + (\lambda \cdot b)\,X \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot f \in U_2$. Damit ist U_2 ein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

- Die Teilmenge

$$U_3 = \{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = 0 \;\text{ oder }\; \mathrm{Grad}(f) \geq 2 \}$$

enthält neben dem Nullpolynom $f = 0$ alle Polynome f vom $\mathrm{Grad}(f) \geq 2$, insbesondere also auch die beiden Polynome

$$f = -X^2 + X \qquad \text{und} \qquad g = X^2 + 1,$$

wegen

$$f + g = \big(-X^2 + X\big) + \big(X^2 + 1\big) = X + 1$$

mit $\mathrm{Grad}(f + g) = 1$ aber nicht deren Summe $f + g$. Damit ist U_3 kein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

- Die Teilmenge

$$U_4 = \big\{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; c \neq 0 \big\}$$

aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ und konstantem Glied $c \neq 0$ enthält insbesondere nicht das Nullpolynom $f = 0$. Damit ist U_4 kein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

22. a) Für $m = 1$ ist jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in Zeilenstufenform, und folglich ist $U_1 = \mathbb{R}^{m\times n}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{m\times n}$; für $n = 1$ sind genau diejenigen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$ in Zeilenstufenform, und folglich ist

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid a_{11} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^{m\times n}$. Für $m \geq 2$ und $n \geq 2$ sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

jeweils in Zeilenstufenform, ihre Summe

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

jedoch nicht; wegen A, $B \in U_1$ und $A + B \notin U_1$ ist im diesem allgemeinen Fall U_1 kein Unterraum von $\mathbb{R}^{m\times n}$.

b) Wir betrachten eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

mit ihrer transponierten Matrix

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{m1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1j} & & & & a_{mj} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

sowie deren Produkt

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^m a_{i1}^2 & * & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \sum\limits_{i=1}^m a_{ij}^2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ * & \dots & \dots & \dots & \sum\limits_{i=1}^m a_{in}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für $A \in U_2$ gilt $A^\top \cdot A = 0$ und damit

$$\sum_{i=1}^m a_{i1}^2 = \ldots = \sum_{i=1}^m a_{ij}^2 = \ldots = \sum_{i=1}^m a_{in}^2 = 0,$$

wobei die jeweiligen Summen genau dann 0 sind, wenn alle Summanden 0 sind; damit ergibt sich

$$a_{11} = \ldots = a_{m1} = 0, \ldots, a_{1j} = \ldots = a_{mj} = 0, \ldots, a_{1n} = \ldots = a_{mn} = 0,$$

also die Nullmatrix $A = 0$. Da die Bedingung $A^\top \cdot A = 0$ für $A = 0$ tatsächlich erfüllt wird, ist $U_2 = \{0\}$, und damit ein Unterraum von $\mathbb{R}^{m\times n}$.

c) Es liegt $A = E_n$ wegen $E_n^2 = E_n$ in U_3 sowie $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$, aber wegen

$$(\lambda \cdot A)^2 = (2 \cdot E_n)^2 = 2^2 \cdot E_n^2 = 4\,E_n \neq 2\,E_n = \lambda \cdot A$$

ist $\lambda \cdot A \notin U_3$. Damit ist U_3 kein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

d) Sei zunächst $n = 1$; für

$$A = (a_{11}) \in \mathbb{R}^{1\times 1} \qquad \text{ist} \qquad \det(A) = a_{11},$$

so daß die zu betrachtende Teilmenge

$$U_4 = \left\{A \in \mathbb{R}^{1\times 1} \mid \det(A) = 0\right\}$$

nur aus der Nullmatrix besteht und damit insbesondere ein Unterraum von $\mathbb{R}^{1\times 1}$ ist. Für den Fall $n \geq 2$ betrachten wir die beiden Diagonalmatrizen

$$A_1 = \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{und} \qquad A_2 = \operatorname{diag}(0, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n};$$

wegen

$$\det(A_1) = 1 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = 0 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 0$$

gilt $A_1 \in U$ und $A_2 \in U_4$, während für die Summe

$$A_1 + A_2 = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) = E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

wegen

$$\det(A_1 + A_2) = \det(E_n) = 1$$

dann $A_1 + A_2 \notin U_4$ gilt. Somit ist U_4 kein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \geq 2$.

23. a) Die Teilmenge

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 \ \text{ und } \ u_1 = -u_3\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_1 \cdot x = b$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Ferner ist die Teilmenge W

$$W = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = -2\,w_3\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_2 \cdot x = b$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = 0 \in \mathbb{R}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Gemäß der Definition der Unterräume U und W gilt

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 = u_2 \ \text{ und } \ u_1 = -u_3\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} \mid u_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid w_1 = -2\,w_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2\,w_2 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid w_2, w_3 \in \mathbb{R} \right\};$$

damit ergibt sich nach der Definition von $U + W$ dann

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 - 2\,w_2 \\ u_1 + w_2 \\ -u_1 + w_3 \end{pmatrix} \mid u_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Für e_1 können wir etwa $u_1 = \frac{1}{3}$, $w_2 = -\frac{1}{3}$ und $w_3 = \frac{1}{3}$ wählen und erhalten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in U + W,$$

für e_2 können wir etwa $u_1 = \frac{2}{3}$, $w_2 = \frac{1}{3}$ und $w_3 = \frac{2}{3}$ wählen und erhalten

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in U + W,$$

und für e_3 können wir etwa $u_1 = w_2 = 0$ und $w_3 = 1$ wählen und erhalten

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U + W.$$

Wegen $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ist damit insbesondere $U + W = \mathbb{R}^3$ gezeigt.

b) Die Teilmenge

$$U = \{ u \in \mathbb{R}^4 \mid 2\,u_1 + u_2 = 0 \ \text{ und } \ u_1 + 2\,u_2 + u_3 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ist als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_1 \cdot x = b$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Ferner ist die Teilmenge

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid w_2 + 2\,w_3 + w_4 = 0 \ \text{ und } \ 4\,w_3 + 3\,w_4 = 0 \}$$

als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_2 \cdot x = b$ mit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ gilt:

$$x \in U \cap W \quad \Longleftrightarrow \quad x \in U \quad \text{und} \quad x \in W$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & 4\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\cdot 2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\frac{1}{3}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}\cdot 3}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ergibt sich

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda \\ 2\,\lambda \\ -3\,\lambda \\ 4\,\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

24. Wir betrachten für den reellen Parameter α den Unterraum

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \text{ und } \alpha\, x_1 - x_2 = 0\}.$$

Aus der zweiten Gleichung $\alpha\, x_1 - x_2 = 0$ ergibt sich $\alpha\, x_1 = x_2$; diese Beziehung setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \underset{\alpha\, x_1 = x_2}{\iff} x_1^2 - \alpha^2\, x_1^2 + x_3^2 = 0 \\ \iff \left(1 - \alpha^2\right) \cdot x_1^2 + x_3^2 = 0 \iff \left(\alpha^2 - 1\right) \cdot x_1^2 = x_3^2. \end{aligned}$$

Dies motiviert folgende Fallunterscheidung:

- Für $|\alpha| < 1$ ist $\alpha^2 - 1 < 0$. Damit ist die Gleichung $\underbrace{\left(\alpha^2 - 1\right)}_{<0} \cdot x_1^2 = x_3^2$ nur für $x_1 = x_3 = 0$ erfüllt. Wegen $\alpha\, x_1 = x_2$ ist auch $x_2 = 0$, und wir erhalten den Unterraum $U = \{0\}$.
- Für $\alpha = -1$ ist $\alpha^2 - 1 = 0$. Damit ist die Gleichung $\underbrace{\left(\alpha^2 - 1\right)}_{=0} \cdot x_1^2 = x_3^2$ nur für $x_3 = 0$ erfüllt. Wegen $\alpha\, x_1 = x_2$ ist $x_1 = -x_2$, und wir erhalten den Unterraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.
- Für $\alpha = 1$ ist $\alpha^2 - 1 = 0$. Damit ist die Gleichung $\underbrace{\left(\alpha^2 - 1\right)}_{=0} \cdot x_1^2 = x_3^2$ nur für $x_3 = 0$ erfüllt. Wegen $\alpha\, x_1 = x_2$ ist $x_1 = x_2$, und wir erhalten den Unterraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$.
- Für $|\alpha| > 1$ ist $\alpha^2 - 1 > 0$. Damit erhalten wir wegen

  $$\left(\alpha^2 - 1\right) \cdot x_1^2 = x_3^2 \iff \sqrt{\alpha^2 - 1} \cdot |x_1| = |x_3|$$

  die Teilmenge

  $$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha\, x_1 \\ \pm\sqrt{\alpha^2 - 1}\, x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Es ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{pmatrix} \in U$ und $y = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ \sqrt{\alpha^2 - 1} \end{pmatrix} \in U$, aber für die Summe gilt $x + y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{\alpha^2 - 1} \end{pmatrix} \notin U$. Damit ist U kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.