MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 5
25.11.2011

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

17. a) Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen ergibt sich zunächst

$$
\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M_α zeilenäquivalente Matrix

$$
\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
$$

für $\alpha = 0$ in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für $\alpha = 1$ in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M_α für $\alpha \in \{0, 1\}$ nicht invertierbar. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich ferner

$$
\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\text{III}}{\overset{\frac{1}{\alpha}\cdot\text{I},\ \frac{1}{1-\alpha}\cdot\text{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\text{I}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\text{II}-\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) = (E_3 \mid M'_\alpha)\,;
\end{aligned}
$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

b) Wegen

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\right) - \left(\alpha^2 + \alpha + \alpha^3\right) =$$

$$= 2\,\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha\left(\alpha^2 - 2\,\alpha + 1\right) = -\alpha\,(\alpha-1)^2$$

ist die Matrix M_α genau dann invertierbar, wenn

$$\det(M_\alpha) = -\alpha\,(\alpha-1)^2 \neq 0, \qquad \text{also} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

gilt, und in diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M_\alpha} \\ &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\alpha\,(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 1 + t^2 \geq 1$, insbesondere also $\det(A) \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) & -\det(A'_{41}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) & +\det(A'_{42}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) & -\det(A'_{43}) \\ -\det(A'_{14}) & +\det(A'_{24}) & -\det(A'_{34}) & +\det(A'_{44}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t^2-1 & 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t^2-1 & -t & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} t^2+1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot (t^2+1) = 1, \\
x_2 &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^2-1 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t \\ t & 0 & 1 \\ 0 & t^2-1 & -t \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{t}{1+t^2} \cdot \Big(\big(0 + 0 - t^2(t^2-1)\big) - \big(0 + (t^2-1) - t^2(t^2+1)\big) \Big) = \\
&= \frac{t}{1+t^2} \cdot \big(-t^4 + t^2 - t^2 + 1 + t^4 + t^2\big) = \frac{t}{1+t^2} \cdot \big(1+t^2\big) = t, \\
x_3 &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & t^2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t^2-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & t^2+1 \\ t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(0 - (t^2+1)\,t\big) = -t, \\
x_4 &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & t^2+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & t^2-1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t & t^2+1 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & -t & t^2-1 \end{vmatrix} = \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{1+t^2} \cdot \Big(\big((t^2-1) + 0 - t^2(t^2+1)\big) - \big(0 + 0 - t^2(t^2-1)\big) \Big) = \\
&= \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(t^2 - 1 - t^4 - t^2 + t^4 - t^2\big) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \big(-1 - t^2\big) = -1,
\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

19. Die gegebene Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

besitzt die Gestalt

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für den Induktionsanfang erhalten wir

- für „$n = 1$“ ist $A_1 = (0)$, also $\det(A_1) = 0$, und
- für „$n = 2$“ ist $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 0 - 1 = -1 = (-1)^{\frac{2}{2}}$.

Für den Induktionsschritt „$n-1 \to n$“ mit $n \geq 3$ erhalten wir ferner mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{1. Zeile}}{=} (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{1. Spalte}}{=} (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{n-2}) = -\det(A_{n-2}). \end{aligned}$$

- Ist nun n ungerade, so ist auch $n-2$ ungerade, und wir erhalten mit der Induktionsvoraussetzung
$$\det(A_n) = -\det(A_{n-2}) = 0.$$
- Ist nun n gerade, so ist auch $n-2$ gerade, und wir erhalten mit der Induktionsvoraussetzung
$$\det(A_n) = -\det(A_{n-2}) = (-1)\cdot(-1)^{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}+1} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

20. a) Für α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A\cdot A^\top &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ -\gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ \delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)\cdot E_4. \end{aligned}$$

Für die Lösung des lineare Gleichungssystem $A\cdot x = b$ treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- Für $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ ist $A = 0$ und $b = 0$, und wir erhalten das lineare Gleichungssystem $0\cdot x = 0$ mit der Lösungsmenge $L = \mathbb{R}^4$.
- Für $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \neq (0,0,0,0)$ erhalten wir wegen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 > 0$ aus der obigen Beziehung

$$A\cdot A^\top = \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\right)\cdot E_4 \iff A\cdot \underbrace{\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\cdot A^\top}_{=A^{-1}} = E_4$$

und damit
$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\cdot A^\top.$$

Wegen

$$A\cdot x = b \iff x = A^{-1}\cdot b = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\cdot A^\top\cdot b =$$
$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ \delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}\cdot \begin{pmatrix} \alpha^2-\delta^2 \\ \alpha\,\beta+\gamma\,\delta \\ \alpha\,\gamma-\beta\,\delta \\ 2\,\alpha\,\delta \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 - \delta^2 \\ \alpha\,\beta + \gamma\,\delta \\ \alpha\,\gamma - \beta\,\delta \\ 2\,\alpha\,\delta \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Gemäß a) gilt

$$A \cdot A^\top = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right) \cdot E_4$$

und damit

$$\det\left(A \cdot A^\top\right) = \det\left(\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right) \cdot E_4\right),$$

woraus sich mit dem Determinantenmultiplikationssatz sowie den Rechenregeln für die Determinante

$$\det(A) \cdot \det(A^\top) = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right)^4 \cdot \det\left(E_4\right),$$

wegen $\det(A^\top) = \det(A)$ und $\det(E_4) = 1$ also

$$\det(A)^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right)^4 \iff \det(A) = \pm\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right)^2,$$

ergibt. Da in der Leibnizformel für die Determinante $\det(A)$ der Summand α^4 ausschießlich für die Permutation $\sigma = \mathrm{id}$ mit $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ entsteht, geht der Summand α^4 positiv in die Determinante ein, so daß nur

$$\det(A) = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right)^2$$

in Frage kommen kann.