Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

13. a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= (1 \cdot 5 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (2 \cdot 4 \cdot 8 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 7) =$$
$$= (40 + 84 + 96) - (64 + 48 + 105) = 220 - 217 = 3$$

sowie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{3 aus III}}{\overset{\text{2 aus II}}{=}} 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{=}}$$
$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{III}+2\cdot\text{I}}{=}} 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{=}$$
$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 6 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4) = 96$$

und

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-7\text{II}}{=}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

b) Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes sowie der Rechenregeln für die Determinante ergibt sich ferner

- $\det(\frac{1}{3}A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det(A) = \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{1}{9}$,
- $\det(B^{-1}B^\top) = \det(B^{-1}) \cdot \det(B^\top) = \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(B) = \frac{1}{96} \cdot 96 = 1$ und
- $\det(CBC^{-1}) = \det(C) \cdot \det(B) \cdot \det(C^{-1}) = \det(C) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(C)} =$ $= \det(C) \cdot \frac{1}{\det(C)} \cdot \det(B) = \det(B) = 96.$

14. a) Wegen

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{=} \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -t+2 & t-2 & 0 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{(t-2)\text{ aus II}}{=}$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}+6\text{II}}{=} (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t+4 \end{vmatrix} \underset{(t+4)\text{ aus III}}{=}$$

$$= (t-2) \cdot (t+4) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (t-2) \cdot (t+4) \cdot (t+2)$$

ist die Matrix A_t genau für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$ invertierbar und in diesen Fällen ist $\det(A_t^{-1}) = \frac{1}{\det(A_t)} = \frac{1}{(t-2)\cdot(t+4)\cdot(t+2)}$.

b) Für $t = 1$ ist gemäß a) die Matrix A_1 invertierbar und es ist $\det(A_1) = -15$ sowie $\det(A_1^{-1}) = \frac{1}{\det(A_1)} = -\frac{1}{15}$. Für jede Matrix B bzw. $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationsatz

$$\det\left(B^{10}\right) = (\det(B))^{10} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \det\left(C^{10}\right) = (\det(C))^{10} \geq 0;$$

damit können wegen $\det(A_1) = -15 < 0$ und $\det(A_1^{-1}) = -\frac{1}{15} < 0$ keine Matrizen B bzw. $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B^{10} = A_1$ bzw. $C^{10} = A_1^{-1}$ existieren.

15. a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a\,x_1 & + & b\,x_2 & + & b\,x_3 & = & r \\ b\,x_1 & + & a\,x_2 & + & b\,x_3 & = & s \\ b\,x_1 & + & b\,x_2 & + & a\,x_3 & = & t \end{array}$$

ist genau dann eindeutig für alle r, s, $t \in \mathbb{R}$ lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

des gegebenen linearen Gleichungssystems invertierbar ist. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \underset{(b-a)\text{ aus III}}{\overset{(b-a)\text{ aus II}}{=}}$$

$$= (b-a)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (b-a)^2 \cdot (a - (-b-b)) = (b-a)^2 \cdot (a + 2\,b)$$

ist die Matrix A genau für alle $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$ und $a \neq -2\,b$ invertierbar und folglich das lineare Gleichungssystem eindeutig für alle $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ lösbar.

b) Es ist

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und
- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

damit erhalten wir

$$A^3 - 3\,A^2 + 4\,E_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

womit wir zur Beziehung

$$A^3 - 3\,A^2 + 4\,E_3 = 0 \iff 4\,E_3 = 3\,A^2 - A^3 \iff E_3 = A \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{4}\,A - \frac{1}{4}\,A^2\right)}_{=A^{-1}}$$

gelangen. Damit ergibt sich für die zu A inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{3}{4}\,A - \frac{1}{4}\,A^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

16. a) Es ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) - a_{12}\,a_{21} =$$
$$= a_{11}\,a_{22} - a_{11}\,\lambda - \lambda\,a_{22} + \lambda^2 - a_{12}\,a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + \det(A)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}\,a_{21} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{21}\,a_{11} + a_{22}\,a_{21} & a_{21}\,a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} A^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot A + \det(A) \cdot E = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}\,a_{21} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{11}\,a_{21} + a_{21}\,a_{22} & a_{12}\,a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{11}\,a_{22} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{11}\,a_{21} + a_{21}\,a_{22} & a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

c) Die quadratische Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})\,x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,,$$

besitzt die Diskriminante

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

und damit keine bzw. eine bzw. zwei Nullstellen, wenn $\Delta < 0$ bzw. $\Delta = 0$ bzw. $\Delta > 0$ ist; wir geben möglichst einfache Beispiele an:

- Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$; damit besitzt p keine Nullstelle.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$; damit besitzt p die doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 1$.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$; damit besitzt p die beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

d) Für eine symmetrische Matrix A ist $a_{12} = a_{21}$. Damit gilt für die Diskriminante Δ von p

$$\begin{aligned} \Delta = (-(a_{11} + a_{22}))^2 - 4\left(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2\right) &= \\ = a_{11}^2 + 2\,a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22} + 4\,a_{12}^2 &= \\ = a_{11}^2 - 2\,a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 + 4\,a_{12}^2 &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2; \end{aligned}$$

wegen $\Delta \geq 0$ besitzt p mindestens eine Nullstelle.

p besitzt genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $\Delta = 0$ gilt; dies ist aber genau dann der Fall, wenn $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$ gilt. Für eine symmetrische Matrix A besitzt demnach p genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $A = a_{11} \cdot E_2$ ist.