

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

9. Es ist

$$\begin{aligned}
 (A|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I, II, III} \cdot 5} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - 2\text{I}} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} + \frac{2}{3}\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{10}{3} & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot (-\frac{3}{5})} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} - 2\text{III}, \text{II} + 4\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} + \text{II}} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \cdot (-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right) = (E_3|A')
 \end{aligned}$$

Damit ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \cdot 14, \text{II} \cdot 9, \text{III} \cdot 9} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 6 & 3 & 12 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - \text{I}} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \frac{4}{5} \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1.
 \end{aligned}$$

Da die dritte Zeile von B_1 Null ist, kann die Matrix B_1 nicht invertierbar sein; damit ist auch die zu B_1 zeilenäquivalente Matrix B nicht invertierbar.

Es ist

$$\begin{aligned}
(C|E_4) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\substack{I \leftrightarrow III \\ \sim \\ II \leftrightarrow IV}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\substack{II-2I \\ \sim \\ III-I; IV-2I}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\substack{II-2IV \\ \sim \\ III+2IV}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
&\stackrel{\substack{I-III \\ \sim \\ II+III}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
&= (E_4|C').
\end{aligned}$$

Damit ist C invertierbar mit

$$C^{-1} = C' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
(A_t|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\substack{II-I \\ \sim \\ III-I}}{\sim} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t-1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \stackrel{\substack{I-II \\ \sim \\ III-2II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-5 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Für $t = 5$ ist A_5 also zu der (wegen ihrer Nullzeile nicht invertierbaren) Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und damit selbst nicht invertierbar. Für $t \neq 5$ gilt

$$(A_t|E_3) \underset{\text{III} \cdot \frac{1}{t-5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-5} & -\frac{2}{t-5} & \frac{1}{t-5} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I+III} \\ \text{II-2III} \end{array} \underset{\sim}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2t-9}{t-5} & -\frac{t-3}{t-5} & \frac{1}{t-5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t-3}{t-5} & \frac{t-1}{t-5} & -\frac{2}{t-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{t-5} & -\frac{2}{t-5} & \frac{1}{t-5} \end{array} \right) = (E_3|A'_t);$$

also ist A_t für $t \neq 5$ invertierbar mit $A_t^{-1} = A'_t = \begin{pmatrix} \frac{2t-9}{t-5} & -\frac{t-3}{t-5} & \frac{1}{t-5} \\ -\frac{t-3}{t-5} & \frac{t-1}{t-5} & -\frac{2}{t-5} \\ \frac{1}{t-5} & -\frac{2}{t-5} & \frac{1}{t-5} \end{pmatrix}$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(B_t|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{II-I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{II} \leftrightarrow \text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{II} \sim \text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{I-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-t & t & -1 \\ 0 & 1 & 0 & t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = (E_3|B'_t)$$

Damit ist B_t für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar mit $B_t^{-1} = B'_t = \begin{pmatrix} 1-t & t & -1 \\ t & -t & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(C_t|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{II} \leftrightarrow \text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{IV} \sim \text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\text{III} \sim \text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Für $t = 1$ ist C_1 also zu der (wegen ihrer beiden Nullzeilen sicherlich nicht invertierbaren) Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und folglich selbst nicht

invertierbar. Für $t \neq 1$ gilt

$$(C_t|E_4) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -t & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{III} \cdot \frac{1}{t-1} \\ \sim \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{1-t} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II}-\text{III} \\ \sim \\ \text{I}-\text{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} & \frac{t}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{array} \right) = (E_4|C'_t);$$

also ist C_t für $t \neq 1$ invertierbar mit $C_t^{-1} = C'_t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t-1} & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} \\ 0 & -\frac{1}{t-1} & \frac{t}{t-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{pmatrix}$.

11. a) Es ist

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} \leftrightarrow \text{II} \\ \sim \\ \text{III}-2\text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I}-2\text{II} \\ \sim \\ \text{III}+\text{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{III} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\ \sim \\ \text{II}-\text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right) = (E_3|A').$$

Damit ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Die invertierbare Matrix A ist Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen. Wir erhalten gemäß den elementaren Zeilenumformungen aus a)

$$F_6 \cdot (F_5 \cdot (F_4 \cdot (F_3 \cdot (F_2 \cdot (F_1 \cdot A)))))) = E_3$$

mit den Elementarmatrizen

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$A = (((((F_1^{-1} \cdot F_2^{-1}) \cdot F_3^{-1}) \cdot F_4^{-1}) \cdot F_5^{-1}) \cdot F_6^{-1}$$

mit den inversen Elementarmatrizen

$$F_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. a) Für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

- Reflexivität: Mit $S = E_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt $S^{-1}AS = E_n^{-1}AE_n = A$; damit gilt $(A, A) \in R$.
- Symmetrie: Sei $(A, B) \in R$; damit gibt es eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$, also $A = (S^{-1})^{-1}BS^{-1}$. Mit $T = S^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt also $T^{-1}BT = A$ und damit $(B, A) \in R$.
- Transitivität: Seien $(A, B) \in R$ und $(B, C) \in R$; damit gibt es Matrizen $S, T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$ und $T^{-1}BT = C$, zusammen also $C = T^{-1}(S^{-1}AS)T = (ST)^{-1}A(ST)$. Mit $Q = ST \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt also $Q^{-1}AQ = C$ und damit $(A, C) \in R$.

Folglich ist R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- b) Es ist $\lambda \cdot E_n \in \overline{\lambda \cdot E_n}$. Für alle $B \in \overline{\lambda \cdot E_n}$ gilt $(\lambda \cdot E_n, B) \in R$, es gibt also eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}(\lambda \cdot E_n)S = B$. Damit ergibt sich $B = \lambda \cdot (S^{-1}E_nS) = \lambda \cdot (S^{-1}S) = \lambda \cdot E_n$. Folglich gilt $\overline{\lambda \cdot E_n} = \{\lambda \cdot E_n\}$.
- c) Wir nehmen zum Widerspruch $(A, B) \in R$ an; dann gibt es eine Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$. Da A wegen

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (E_3|A')$$

invertierbar ist, muß auch $B = S^{-1}AS$ als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar sein; da die dritte Zeile von B Null ist, kann B aber nicht invertierbar sein, Widerspruch! Damit gilt also $(A, B) \notin R$.