MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 1
28.10.2011

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & - & 3\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1, x_2 und x_4 dann

- $x_1 - 5\,x_3 = -5$, also $x_1 = -5 + 5\,x_3 = -5 + 5\,\lambda$,
- $x_2 + 2\,x_3 = 3$, also $x_2 = 3 - 2\,x_3 = 3 - 2\,\lambda$, und
- $x_4 = 1$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -5 + 5\,\lambda \\ 3 - 2\,\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

b) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & 6\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 4\,x_4 & = & -3 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & - & 4\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\leadsto}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I}}{\leadsto}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}-3\cdot\mathrm{I}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\leadsto}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\leadsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit sind x_3 und x_4 freie Variablen, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die beiden gebundenen Variablen x_1 und x_2 dann

- $x_1 - 2\,x_3 = 1$, also $x_1 = 1 + 2\,\lambda$, und
- $x_2 - 2\,x_4 = -1$, also $x_2 = -1 + 2\,\mu$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2\,\lambda \\ -1 + 2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

2. Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b)$. Es ist

$$(A_a|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+a\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}\cdot 4}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 4\,(1+a) & 4\,(2+a) & 4\,(2+a) \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-(1+a)\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 0 & (3-a)(2+a) & 3-a \end{array}\right),$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ ist $3 - a \neq 0$ und $2 + a \neq 0$, und wir erhalten
  - $(3-a)\,(2+a)\,x_3 = (3-a)$, also $x_3 = \frac{1}{2+a}$,
  - $4\,x_2 + \frac{2+a}{2+a} = 5$, also $x_2 = 1$,
  - $x_1 + 1 + \frac{1}{2+a} = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{2+a}$.

  Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung mit

  $$L_a = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2+a} \\ 1 \\ \frac{1}{2+a} \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $a = -2$ gilt

  $$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right);$$

  wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das gegebene lineare Gleichungssystem für $a = -2$ unlösbar.

- Für $a = 3$ gilt

  $$(A_3|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

  damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $4\,x_2 + 5\lambda = 5$, also $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda$ sowie $x_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda + \lambda = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda$. Somit ist

  $$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda \\ \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

  die Lösungsmenge des durch $(A_3|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

3. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & & & 2\,x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 7\,x_3 & & & = & -3 \\ -3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & & & a\,x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 8\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & b \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b_b)$. Es ist

$$(A_a|b_b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right) \overset{\text{II}+(-2)\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & a & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+3\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & b \end{array}\right) \overset{\text{IV}+(-1)\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & a-3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+(-2)\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & b+2 \end{array}\right) \overset{\text{IV}+(-2)\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $b = 0$ gilt; dabei ergibt sich

- für $a = 7$ wegen

$$(A_7|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\,\lambda + \mu \\ 1 - 3\,\lambda - 2\,\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ sowie

- für $a \neq 7$ wegen

$$(A_a|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{III}\cdot\frac{1}{a-7}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  die Lösungsmenge $L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 - 2\,\lambda \\ 1 - 3\,\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

4. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha\,x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$(A_\alpha|b_\beta) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\frac{2}{3}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}-\frac{3}{4}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\frac{3}{4} & \beta \end{array}\right)$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\alpha \neq \frac{3}{4}$ ist $\alpha - \frac{3}{4} \neq 0$, und die rechte Seite enthält keinen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und da keine der Variablen frei ist, besitzt es genau eine Lösung.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$ enthält die rechte Seite einen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem unlösbar, es besitzt keine Lösung.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$ enthält die rechte Seite keinen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und da die Variable x_4 frei ist, besitzt es mehrere Lösungen. Es ist

  $$\left(A_{\frac{3}{4}}|b_0\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  und mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man
  - $\frac{4}{3}\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_3 = -\frac{3}{4}\lambda$,
  - $\frac{3}{2}\,x_2 + x_3 = 0$, also $x_2 = \frac{1}{2}\lambda$, und
  - $2\,x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = -\frac{1}{4}\lambda$,

  und folglich die Lösungsmenge

  $$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{3}{4}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$