

**Wiederholungsklausur zur Vorlesung
„Lineare Algebra und analytische Geometrie I
(Unterrichtsfach)“
— Lösungsvorschlag —**

1. a) Für $m \times n$ -Matrizen gibt es die folgenden drei Typen elementarer Zeilenumformungen:

- Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$,
- Vertauschen zweier Zeilen und
- Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Drei zu einer $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gebildete Größen, die sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht ändern, sind unter anderem

- die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$,
- der Spaltenrang der Matrix A und
- der Zeilenraum der Matrix A .

- b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde die $n \times n$ -Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & \dots & & 2 \\ -2 & -2 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2 & & & \ddots & \ddots & 2 \\ -2 & -2 & \dots & \dots & -2 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

betrachtet. Es ist zunächst

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 6$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (6 - 8 + 8) - (-12 - 4 - 8) = 6 + 24 = 30;$$

ferner zeigen wir für alle $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion

$$\det(A_n) = \frac{(n+2)!}{4}.$$

Für „ $n = 2$ “ ist $\det(A_2) = 6 = \frac{(2+2)!}{4}$, und für „ $n \rightarrow n + 1$ “ ist

$$\begin{aligned}
 \det(A_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & \dots & & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & & & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & \dots & -2 & n & 2 \\ -2 & -2 & \dots & \dots & \dots & -2 & n+1 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{letzte Zeile} + \text{erste Zeile}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & \dots & & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & & & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & \dots & -2 & n & 2 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n+3 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Laplace}}{\underset{\text{letzte Zeile}}{=}} (-1)^{(n+1)+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & & 2 & 2 \\ -2 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -2 & & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ -2 & \dots & \dots & -2 & n & 2 \end{vmatrix} \\
 &\quad + (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot (n+3) \cdot \det(A_n) \\
 &\stackrel{\text{zweite Zeile} - \text{erste Zeile}}{=} (-1)^{n+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ -2 & \dots & \dots & -2 & n & 2 \end{vmatrix} \\
 &\quad + (n+3) \cdot \det(A_n) \\
 &\stackrel{\text{Induktions-}}{\underset{\text{voraussetzung}}{=}} 0 + (n+3) \cdot \frac{(n+2)!}{4} = \frac{(n+3)!}{4}.
 \end{aligned}$$

2. a) Für die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (M \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{III}-4\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha-4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{III}+2\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -4 & 2 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M zeilenäquivalente Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

für $\alpha = 0$ in der dritten Zeile eine Nullzeile und ist damit in diesem Fall insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M für $\alpha = 0$ nicht invertierbar. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
 (M \mid E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\frac{1}{\alpha} \cdot \text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{II}-2\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1+\frac{4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{\alpha} & 1-\frac{4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array} \right) \\
 &\stackrel{\text{I}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-4}{\alpha} & \frac{-\alpha+2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{\alpha} & \frac{\alpha-4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{array} \right) = (E_3 \mid M');
 \end{aligned}$$

damit ist M für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M^{-1} = M' = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-4}{\alpha} & \frac{-\alpha+2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{8}{\alpha} & \frac{\alpha-4}{\alpha} & -\frac{2}{\alpha} \\ -\frac{4}{\alpha} & \frac{2}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- b) Der Rang der gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension des Spaltenraumes S , der von den n -Spalten $s_1, \dots, s_n$ der Matrix A erzeugt wird; es ist also $S = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. Um die gewünschte Beziehung zu zeigen, müssen wir die lineare Unabhängigkeit der Spalten $s_1, \dots, s_n$ der Matrix A nachweisen. Seien dazu $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot s_1 + \dots + \lambda_n \cdot s_n = 0;$$

diese Beziehung fassen wir nun als homogenes lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

auf, und nach Multiplikation dieser Gleichung mit $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$ erhalten wir

$$A^\top \cdot (A \cdot x) = A^\top \cdot 0, \quad \text{also} \quad (A^\top A) \cdot x = 0,$$

woraus sich wegen $A^\top A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ schon $x = 0$ ergibt. Damit ergibt sich $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, und folglich sind die Spalten $s_1, \dots, s_n$ der Matrix A linear unabhängig, weswegen

$$\text{Rang}(A) = \dim(S) = \dim\langle s_1, \dots, s_n \rangle = n$$

gilt.

3. a) Die gegebene Abbildung

$$f : \text{Pol}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3a_2 \end{pmatrix},$$

ordnet jedem Polynom

$$v = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \text{Pol}_2(\mathbb{R})$$

mit $\text{Grad}(v) \leq 2$ eine Matrix der Gestalt

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

zu. Für alle

$$v = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, \quad w = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 \in \text{Pol}_2(\mathbb{R})$$

gilt

$$v + w = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2$$

und damit

$$\begin{aligned} f(v + w) &= \begin{pmatrix} (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) & a_2 + b_2 \\ -(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) & (a_1 + b_1) + 3(a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 + 2a_2) + (b_0 + b_1 + 2b_2) & a_2 + b_2 \\ (-a_1 + a_2) + (-b_1 + b_2) & (a_1 + 3a_2) + (b_1 + 3b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + b_1 + 2b_2 & b_2 \\ -b_1 + b_2 & b_1 + 3b_2 \end{pmatrix} \\ &= f(v) + f(w); \end{aligned}$$

damit ist f additiv. Für alle

$$v = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \text{Pol}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\lambda \cdot v = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) X + (\lambda a_2) X^2$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot v) &= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + \lambda a_1 + 2(\lambda a_2) & \lambda a_2 \\ -(\lambda a_1) + \lambda a_2 & \lambda a_1 + 3(\lambda a_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(a_0 + a_1 + 2a_2) & \lambda a_2 \\ \lambda(-a_1 + a_2) & \lambda(a_1 + 3a_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3a_2 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot f(v); \end{aligned}$$

damit ist f homogen. Folglich ist f eine lineare Abbildung.

b) Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot B_3 + \lambda_4 \cdot B_4 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_2 = 0$ und folglich $\lambda_4 = 0$; ferner erhalten wir aus den anderen beiden Gleichungen $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ und $\lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ durch Differenzbildung $\lambda_3 = 0$ und folglich $\lambda_1 = 0$. Es gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$; damit sind B_1, B_2, B_3, B_4 linear unabhängig, und wegen $\dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 4$ schon eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

c) Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &\stackrel{a_0=1, a_1=0, a_2=0}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + (-1) \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 \\ f(X) &\stackrel{a_0=0, a_1=1, a_2=0}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + (-1) \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 1 \cdot B_4 \\ f(X^2) &\stackrel{a_0=0, a_1=0, a_2=1}{=} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 \end{aligned}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $1, X, X^2$ von $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$ und B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

4. a) • Für einen reellen Vektorraum V definiert man die Dimension

$$\dim(V) = \begin{cases} 0, & \text{falls } V = \{0_V\} \text{ der Nullraum ist,} \\ n, & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist und} \\ & \text{eine Basis der Länge } n \text{ besitzt,} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$$

• Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ definiert man

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \quad \text{sowie} \quad \text{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

- b) Wir bestimmen in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Dimension des von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -s \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -s^2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraums $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten dazu die Matrix $A = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -s & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -s^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{I}]{\text{III}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -s & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1-s^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3\text{II}]{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\dim(U) = \text{Rang}(A) = \begin{cases} 2, & \text{falls } s = 1, \\ 3, & \text{falls } s = -1, \\ 4, & \text{falls } s \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}. \end{cases}$$

- c) Wir betrachten zunächst eine surjektive lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Kern}(f) = U$; nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4.$$

Wegen der Surjektivität von f ist $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$, also $\dim(\text{Bild}(f)) = 2$, woraus sich $\dim(U) = \dim(\text{Kern}(f)) = 2$ ergibt; gemäß b) ist dies genau für $s = 1$ der Fall.

Wir betrachten jetzt den Parameter $s = 1$; gemäß b) bilden also die Vektoren u_1 und u_2 eine Basis von U . Die Matrix $B = (u_1, u_2, e_3, e_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ist wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Spalte}]{\text{vierte}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Spalte}]{\text{dritte}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

invertierbar, ihre Spalten u_1, u_2, e_3, e_4 bilden also eine Basis des $\mathbb{R}^4$, so daß es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gibt; diese ist wegen $\text{Bild}(f) = \langle e_1, e_2 \rangle = \mathbb{R}^2$ surjektiv und besitzt den Kern $\text{Kern}(f) = \langle u_1, u_2 \rangle = U$.