MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Klausur
22.02.2012

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Wir zeigen mit Hilfe des Unterraumkriteriums, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a+b-c=0 \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist:

- Für die Nullmatrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $0+0-0=0$, also $0 \in U$.
- Für alle $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $a_1+b_1-c_1=0$ und $a_2+b_2-c_2=0$, so daß für $A+B = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)-(c_1+c_2) = (a_1+b_1-c_1)+(a_2+b_2-c_2) = 0+0 = 0$ dann $A+B \in U$ folgt.
- Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $a+b-c=0$, so daß für $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a & \lambda\cdot b \\ \lambda\cdot c & \lambda\cdot d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen $\lambda\cdot a+\lambda\cdot b-\lambda\cdot c = \lambda\cdot(a+b-c) = \lambda\cdot 0 = 0$ schon $\lambda\cdot A \in U$ folgt.

Damit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei U genau aus den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & d \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B_3}$$

mit $a, b, d \in \mathbb{R}$ besteht; damit bilden B_1, B_2, B_3 ein Erzeugendensystem von U. Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1\cdot B_1 + \lambda_2\cdot B_2 + \lambda_3\cdot B_3 = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; damit sind B_1, B_2, B_3 auch linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von U, und es gilt $\dim(U) = 3$. Wir können nun B_1, B_2, B_3 mit jedem $B_4 \notin U$ zu einer Basis B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ergänzen, also etwa $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $W = \langle B_4 \rangle$ gemäß

$$U + W = \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad U \cap W = \{0\}$$

ein U komplementärer Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^4$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3$ und $W = \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2$ von $\mathbb{R}^4$, wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2, u_3 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist, wenn es also Koeffizienten λ_1, $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum homogenen linearen Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $A = (u_1, u_2, u_3, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-4\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{2\,\alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2 + (-\alpha) \cdot u_3}_{x \in U} = x = \underbrace{\alpha \cdot w_1 + \alpha \cdot w_2}_{x \in W},$$

also

$$x = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

ergibt. Damit ist $U \cap W = \mathbb{R} \cdot v$, weswegen etwa der Vektor v wegen $v \neq 0$ eine Basis von $U \cap W$ ist.

2. a) Wir betrachten den endlichdimensionalen $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit $V \neq \{0_V\}$.
   - Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen
     - linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ stets $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgt.
     - ein Erzeugendensystem von V, wenn jedes $v \in V$ eine Linearkombination $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist.

- „Basisauswahlsatz“: Aus jedem Erzeugendensystem von V kann eine Basis von V ausgewählt werden.
- „Basisergänzungssatz“: Jedes System linear unabhängiger Vektoren in V läßt sich zu einer Basis von V ergänzen.

b) Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ aller Polynome v mit reellen Koeffizienten vom $\mathrm{Grad}(v) \leq 3$; für einen Vektor

$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \quad \text{sei} \quad p(v) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sein Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis X^3, X^2, X, 1. Damit ergeben sich für v_1, v_2, v_3, v_4, $v_5 \in V$ die Koordinatenvektoren

$$p(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; p(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; p(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p(v_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; p(v_5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Hilfsmatrix $A = (p(v_1), p(v_2), p(v_3), p(v_4), p(v_5)) \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ besitzt wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II},\ \text{IV}-3\text{II}}{\overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\underset{\text{IV}-4\text{II}}{\overset{\text{I}+2\text{III},\ \text{II}+\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{III}}{\overset{(-1)\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den $\mathrm{Rang}(A) = 3$; da die erste, zweite und vierte Spalte jeweils einen Pivot beinhaltet, sind $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_4)$ linear unabhängig, und es gilt

$$p(v_3) = p(v_1) - p(v_2) \quad \text{und} \quad p(v_5) = -2\,p(v_1) - p(v_2) + 3\,p(v_4).$$

Folglich sind v_1, v_2, v_4 linear unabhängige Vektoren mit

$$v_3 = v_1 - v_2 \in \langle v_1, v_2, v_4 \rangle \quad \text{und} \quad v_5 = -2\,v_1 - v_2 + 3\,v_4 \in \langle v_1, v_2, v_4 \rangle,$$

so daß v_1, v_2, v_4 eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ ist. Mit dem konstanten Polynom $v_6 = 1$ ist die Hilfsmatrix $B = (p(v_1), p(v_2), p(v_4), p(v_6)) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

wegen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Spalte}}{\overset{\text{vierte}}{=}} (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -1 \neq 0$$

invertierbar; damit sind $p(v_1)$, $p(v_2)$, $p(v_4)$, $p(v_6)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und folglich die Vektoren v_1, v_2, v_4, v_6 eine Basis von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$.

3. a) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $M \cdot B = E_n = B \cdot M$ gibt. Für alle $s,\, t \in \mathbb{R}$ ist

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2t \\ 2t & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 1 & 0 & -t \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{IV+I}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2t \\ t & 0 & 0 & s \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 0 & 0 & t \end{vmatrix} \underset{\text{Spalte}}{\overset{\text{zweite}}{=}}$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot (-1)}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & s \\ t & 1 & -s \\ s & 0 & t \end{vmatrix} \underset{\text{Spalte}}{\overset{\text{zweite}}{=}} \underbrace{(-1)^{2+2} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} t & s \\ s & t \end{vmatrix} = t^2 - s^2;$$

damit ist die Matrix M genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \neq 0$, also $t^2 - s^2 \neq 0$ bzw. $t \neq \pm s$ ist.

b) Der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist als die Dimension des von den Spalten $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}^m$ der Matrix A erzeugten Unterraums erklärt. Unter Verwendung der Beziehung $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^\top)$ ergibt sich

$$\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ surjektiv} \iff \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Zeilenzahl}(A) = m \iff$$
$$\mathrm{Rang}(A^\top) = \mathrm{Spaltenzahl}(A^\top) = m \iff \ell_{A^\top} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ injektiv.}$$

4. a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \mathrm{Rang}(A) = 2$, also $\dim \mathrm{Kern}(f) = 4 - r = 2$ und $\dim \mathrm{Bild}(f) = r = 2$; genauer gilt:

- $\mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_3 und x_4 überein; folglich ist

$$b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.

- $\mathrm{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste und zweite Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste und zweite Spalte von A, also
$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

b) Da c_1 die erste und c_2 die zweite Spalte von A ist, ergänzen wir b_3, b_4 mit $b_1 = e_1$ (damit ist $\ell_A(b_1) = c_1$) und $b_2 = e_2$ (damit ist $\ell_A(b_2) = c_2$) zu einer Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und erhalten
$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}).$$
Ferner ergänzen wir c_1, c_2 etwa durch $c_3 = e_3$ zu einer Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ und erhalten
$$C = (c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R});$$
es ist nämlich
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -1 \neq 0.$$
Wegen $f(b_1) = c_1$ und $f(b_2) = c_2$ sowie $f(b_3) = 0$ und $f(b_4) = 0$ ist
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$
die darstellende Matrix von $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$, und mit dem Basiswechsel gilt $C^{-1}AB = M$.

c) Da gemäß b) die Matrix C invertierbar ist, bilden ihre Spalten c_1, c_2, c_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$; nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es damit genau eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$g(c_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(c_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(c_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Damit ist $g \neq 0$, und für $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gilt wegen
$$\begin{aligned} (g \circ f)(b_1) &= g(f(b_1)) = g(c_1) = 0 \\ (g \circ f)(b_2) &= g(f(b_2)) = g(c_2) = 0 \\ (g \circ f)(b_3) &= g(f(b_3)) = g(0) = 0 \\ (g \circ f)(b_4) &= g(f(b_4)) = g(0) = 0 \end{aligned}$$
für die Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ schon $g \circ f = 0$.