

## Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“

1. a) Man zeige, daß

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a + b - c = 0 \right\}$$

ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist, und berechne die Dimension von  $U$ . Ferner bestimme man einen zu  $U$  komplementären Unterraum  $W$  in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ . (3)

- b) Im reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Unterräume  $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  und  $W = \langle w_1, w_2 \rangle$  gegeben. Man bestimme eine Basis von  $U \cap W$ . (3)

2. a) Man betrachte den endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit  $V \neq \{0_V\}$ .
- Für  $v_1, \dots, v_n \in V$  definiere man „ $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig.“ und „ $v_1, \dots, v_n$  sind ein Erzeugendensystem von  $V$ .“ (1)
  - Man formuliere den Basisauswahlsatz und den Basisergänzungssatz. (2)

- b) Im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\text{Pol}_3(\mathbb{R})$  werde der von

$$v_1 = X^3 + X^2 + X, \quad v_2 = X^3 - 2X^2 - 1, \\ v_3 = 3X^2 + X + 1, \quad v_4 = X^3 + X + 1, \quad v_5 = X + 4$$

erzeugte Unterraum  $V$  betrachtet. Man wähle aus  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  eine Basis von  $V$  aus und ergänze diese zu einer Basis von  $\text{Pol}_3(\mathbb{R})$ . (3)

3. a) Man definiere für eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  den Begriff „ $M$  ist invertierbar.“ und bestimme alle  $s, t \in \mathbb{R}$ , für die die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2t \\ 2t & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

invertierbar ist. (3)

- b) Man definiere für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  den Begriff „Rang von  $A$ “ und zeige:  $\ell_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv  $\iff \ell_{A^T} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv. (3)

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

sowie die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = A \cdot x$ .

- a) Man bestimme eine Basis von  $\text{Kern}(f)$  und eine Basis von  $\text{Bild}(f)$ . (2)
- b) Man bestimme invertierbare Matrizen  $B \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$  und  $C \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  mit

$$C^{-1}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- c) Man entscheide, ob es eine lineare Abbildung  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g \neq 0$  und  $g \circ f = 0$  gibt, und begründe die Entscheidung. (2)