MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2011/12
Blatt 14
06.02.2012

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Unterrichtsfach)“ — Bearbeitungsvorschlag —

53. a) Für $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \mid B')\,;$$

damit ist B invertierbar mit $B^{-1} = B'$, und folglich bilden die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Ferner ist $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

invertierbar, und folglich bilden die Vektoren c_1, c_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Wegen

$$\ell_A(b_1) = A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot c_1 + (-1) \cdot c_2,$$

$$\ell_A(b_2) = A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-6) \cdot c_1 + 4 \cdot c_2,$$

$$\ell_A(b_3) = A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (-15) \cdot c_1 + 10 \cdot c_2$$

gilt für die darstellende Matrix M von ℓ_A bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$ gemäß der Definition

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Alternativ ergibt sich die Matrix M auch über die Formel

$$M = C^{-1}AB = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -15 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

c) Nun ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ und c_1, c_2 von $\mathbb{R}^2$; damit gilt nach Definition

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 1\cdot c_1 + 0\cdot c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ f(b_2) &= (-2)\cdot c_1 + 2\cdot c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ f(b_3) &= 1\cdot c_1 + 1\cdot c_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Abbildungsmatrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A'}$ ergibt sich also

$$A'\,B = A'\,(b_1, b_2, b_3) = (A'\,b_1, A'\,b_2, A'b_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = D$$

und damit

$$A' = D\,B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ läßt sich die Matrix A' auch über die Formel $A = C^{-1}A'B$ und damit

$$A' = CAB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen.

54. a) Für ein Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

ist

$$p(X+1) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 + a_3(X+1)^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R});$$

die Unbestimmte X wird also durch $X+1$ ersetzt; für die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}), \quad p(X) \mapsto p(X+1) - p(X),$$

ergibt sich damit für $p(X) = 1$, also mit $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(1) = 1 - 1 = 0,$$

für $p(X) = X$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X) = (X+1) - X = 1,$$

für $p(X) = X^2$, also mit $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, dann

$$f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$$

und für $p(X) = X^3$, also $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dann

$$f(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1.$$

Wegen

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \\ f(X^3) &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot X + 3 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 \end{aligned}$$

ergibt sich damit für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis 1, X, X^2, X^3 damit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

b) Für das konstante Polynom 1 gilt gemäß a) $f(1) = 0$, für das Nullpolynom 0 gilt ebenfalls $f(0) = 0$; wegen $f(0) = f(1)$ mit $0 \neq 1$ ist f nicht injektiv. Damit kann f als Endomorphismus des endlich–dimensionalen Vektorraums $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ auch nicht surjektiv sein; insbesondere ist f nicht bijektiv.

c) Die darstellende Matrix M liegt bereits in Zeilenstufenform vor, und wir können $\mathrm{Rang}(M) = 3$ ablesen; damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Kern}(\ell_M) &= 4 - \mathrm{Rang}(M) = 4 - 3 = 1 \\ \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(\ell_M) &= \mathrm{Rang}(M) = 3. \end{aligned}$$

Genauer ergibt sich:

- Es ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_M)$ und damit

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X^3 = 1$$

  eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$; es ist also $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R})$.

- Es ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(\ell_M)$ und damit

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1,\\ 1\cdot 1 + 2\cdot X + 0\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1+2X,\\ 1\cdot 1 + 3\cdot X + 3\cdot X^2 + 0\cdot X^3 &= 1+3X+3X^2 \end{aligned}$$

  eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$; man erhält also $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, woraus sich wegen $\dim \mathrm{Bild}(f) = 3 = \dim \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ schon $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ergibt.

55. a) Da f injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Kern}(f) = \{0_W\} \qquad \text{und damit} \qquad \dim \mathrm{Kern}(f) = 0;$$

da f nicht surjektiv ist, gilt

$$\mathrm{Bild}(f) \subsetneq W \qquad \text{und damit} \qquad \dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W).$$

Mit Hilfe der Dimensionsformel erhält man daher

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f) < \dim(W).$$

b) Wir nehmen zum Widerspruch $\dim(V) \leq \dim(W)$ an. Seien

$$n = \dim(V) \qquad \text{und} \qquad m = \dim(W),$$

und wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V sowie eine Basis $w_1, \ldots, w_m$ von W. Damit gibt es eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$f : V \to W \qquad \text{mit} \qquad f(v_1) = w_1, \quad \ldots, \quad f(v_n) = w_n,$$

und da die Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, ist f injektiv im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt aber $\dim(V) > \dim(W)$.

56. a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III-I}}{\overset{\mathrm{II-I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III-2II}}{\overset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

ist

$$r = \mathrm{Rang}(A) = 2.$$

b) Mit Hilfe der in a) ermittelten Zeilenstufenform ergibt sich:

- $\mathrm{Kern}(\ell_A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Unbestimmten x_3 und x_4 überein; demnach bilden

$$b_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix}5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_A)$.

- $\mathrm{Bild}(\ell_A) = \{A \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da x_1 und x_2 die gebundenen Unbestimmten von $A \cdot x = 0$ sind, bilden s_1', s_2' eine Basis des Spaltenraums von A' und dementsprechend

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  eine Basis von $\mathrm{Bild}(\ell_A)$.

c) Da c_1 die erste und c_2 die zweite Spalte von A ist, ergänzen wir b_3, b_4 mit $b_1 = e_1$ (damit ist $\ell_A(b_1) = c_1$) und $b_2 = e_2$ (damit ist $\ell_A(b_2) = c_2$) zu einer Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und erhalten

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}).$$

Ferner ergänzen wir c_1, c_2 etwa durch $c_3 = e_3$ zu einer Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$: mit $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}(C|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) &\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim}} \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) &= (E_3|C^{-1}).\end{aligned}$$

Mit

$$P = C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und

$$Q = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$$

ergibt sich also für die darstellende Matrix M von ℓ_A bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ also

$$PAQ = C^{-1}AB = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$